БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА
МАТЕМАТИКА

Д. СУЛЛИВАН

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

Geometric topology

Localization, periodicity and Galois symmetry

by

Dennis Sullivan

Massachusetts Institute of Technology
Cambridge, Massachusetts

June 1970

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА «МАТЕМАТИКА»

Д. Сулливан

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ

Локализация, периодичность и симметрия Галуа

Перевод с английского
под редакцией
Д. Б. Фукса

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» · МОСКВА 1975

УДК 513.836

Книга написана на основе курса лекций по геометрической топологии, прочитанных известным американским математиком. В ней впервые в мировой литературе изложены результаты автора, обнаруживающие совершенно неожиданные связи между топологией, алгебраической геометрией и теорией чисел.

Книга заинтересует математиков многих специальностей. Она будет полезна аспирантам и студентам старших курсов университетов.

Редакция литературы по математическим наукам

С $\frac{20203\text{-}018}{041\ (01)\text{-}75}$ 18-75 © Перевод на русский язык, «Мир», 1975

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Дэнис Сулливан — один из талантливейших молодых американских топологов. Его первая работа, законченная им в 1967 г., содержала доказательство «Hauptvermutung» — основной гипотезы комбинаторной топологии — для односвязных многообразий, четырехмерные когомологии которых не имеют 2-кручения. Следующая работа Сулливана (1969 г.) была посвящена доказательству важной гипотезы Адамса — некоторого достаточного условия гомотопической тривиальности векторного расслоения. Доказательство этой гипотезы и является главной целью настоящей книги.

Однако книга содержит и много материала, не связанного с этой гипотезой. Первые три главы посвящены систематическому перенесению в гомотопическую топологию алгебраических операций локализации и пополнения. Материал этих глав частично используется в доказательстве гипотезы Адамса, но представляет и значительный самостоятельный интерес; заметим, что эта часть книги постоянно цитируется в журнальной литературе. Главы 4 и 5 содержат доказательство самой гипотезы и различных ее переформулировок. Наконец, в гл. 6 приводятся элементы классификации кусочно линейных и топологических $\mathbb{R}^n$-расслоений. Эта глава составляет переход ко второй, пока еще не написанной, части, которая должна быть посвящена кусочно линейным и топологическим многообразиям.

В книге много отступлений, касающихся самых разных вещей, — гомотопической классификации автоморфизмов кватернионной проективной плоскости, топологии вещественных алгебраических многообразий и др. Но и будучи столь разнообразной по содержанию, книга оставляет цельное впечатление, поскольку автор все рассматривает под единым углом зрения — локализаций, пополнений и симметрий Галуа.

В целом книга представляется весьма содержательной и заслуживает самого внимательного изучения. Для ее чтения требуется лишь знакомство с элементами топологии и алгебраической геометрии. Однако в ней довольно много неясных, неформально написанных мест, продумывание и доделка которых оставляется читателю. Некоторые пояснения, главным образом ссылки на журнальную литературу, сделаны нами в подстрочных примечаниях.

Д. Фукс

ВВЕДЕНИЕ

К необходимости применять локализацию автор пришел в 1965—1967 гг. при изучении инвариантов комбинаторных многообразий. Уже в самом начале этой работы стало понятно, что простое число 2 нужно рассматривать отдельно от остальных простых чисел.

Алгебраически эта необходимость появляется при изучении инвариантов квадратичных форм[1]). (Впрочем, при изучении многообразий рассматриваются только инварианты квадратичных форм над полем характеристики два и характеристики нуль.)

Геометрически эта необходимость появляется, когда мы пытаемся оценить область действия этих инвариантов. С этой точки зрения характерен вопрос о реализации циклов подмногообразиями: по модулю два любой цикл реализуется, а по модулю других простых чисел возникает множество препятствий (Том).

Потребность в специальном изучении инвариантов, связанных с нечетными простыми числами, видна уже из того факта, что в действительности не всякий цикл может быть реализован подмногообразием. Естественный инвариант, возникающий при этом, «сигнатурный инвариант многообразия M», — это функция, относящая каждому замкнутому подмногообразию трубчатой окрестности многообразия M в евклидовом пространстве сигнатуру его пересечения с M.

Естественной алгебраической формализацией этого инварианта служит каноническая ориентация в K-теории:

$$\Delta_M \in \{K\text{-гомологии } M\}.$$

В гл. 6 мы обсудим эту ситуацию на двойственном языке векторных расслоений. Двойственность

---

[1]) Которые, по словам Винкельнкемпера, являются главным средством дискретизации компактных многообразий.

(Александера) между теорией многообразий и теорией векторных расслоений базируется на трансверсальности и геометрической технике перестроек. Абсолютно точный смысл этой двойственности можно придать лишь в односвязном случае.

Таким образом, хотя в этой работе речь идет только о двойственной теории векторных расслоений, она инспирирована проблемами теории многообразий.

Теория векторных расслоений, будучи гомотопической теорией, приспособлена к применению арифметических понятий, вводимых в первой главе. Предметом этой главы служит «тензорное умножение» теории гомотопий на различные кольца. Особенно полезно «умножать» на поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и на кольцо $\hat{\mathbb{Z}}_p$ целых p-адических чисел.

Этот процесс локализации частично мотивируется сказанным выше об инвариантах квадратичных форм. Заметим, однако, что геометрические вопросы не требуют рассмотрения p-адических чисел [1]).

К необходимости привлекать p-адические числа приводит изучение работ Адамса о послойной гомотопической эквивалентности векторных расслоений — эти вопросы родственны обсуждавшимся вопросам теории многообразий. Адамс высказал предположение, что между векторными расслоениями, связанными друг с другом его знаменитыми операциями ψ^k, имеются некоторые фундаментальные гомотопические соотношения.

Адамс доказал, что если эти соотношения имеют место, то они универсальны, — весьма волнующее положение дел! В действительности Адамс прогнозировал бесконечное число соотношений — по одному на каждое простое число p. Каждое из этих соотношений содержит информацию о всех простых числах, не равных p.

После этого Квиллен заметил, что соотношения Адамса имеют аналоги в характеристике p и что эти

---

[1]) Хотя теорема Минковского — Хассе о квадратичных формах его требует.

аналоги легко доказываются. Он предположил, что с помощью этальных гомотопий алгебраических многообразий по модулю p удастся доказать и топологическую гипотезу Адамса.

С другой стороны, видно, что гипотеза Адамса связана с кусочно линейной и топологической теориями.

Автор старался найти топологическое или геометрическое объяснение феномена Адамса и получил переформулировку, доказываемую уже на основании того факта, что существует алгебраическая конструкция конечных когомологий алгебраических многообразий (эталь-теория). Возникает явление, которое можно описать только на p-адическом языке; оно состоит в том, что p-адическая теория векторных расслоений *в каждой размерности* имеет естественную группу симметрий. При этом симметрии, возникающие в $(n-1)$-мерной теории, индуцируют некоторые канонические послойные гомотопические эквивалентности в n-мерной теории, и этих эквивалентностей оказывается более чем достаточно для доказательства гипотезы Адамса. Более того, все элементы любой орбиты группы симметрий имеют одинаковый (нестабильный) послойный гомотопический тип.

Симметрии, действующие на этих векторных расслоениях, — это просто симметрии Галуа, действующие в корнях из единицы, теоретико-гомотопически реализованные в «чеховских нервах» алгебраических покрытий грассмановых многообразий. Эти симметрии продолжаются в K-теорию, и при этом плотное подмножество в группе симметрий можно отождествить с операциями Адамса, точнее с их «изоморфической частью». Следует заметить, что это отождествление не нужно для применения симметрий Галуа. Тот факт, что некоторые сложные выражения из внешних степеней векторных расслоений индуцируют хорошие операции в K-теории, служит подтверждением скорее изобретательности Адамса, чем естественности нашей точки зрения.

Симметрии Галуа (благодаря переформулировке сигнатурного инварианта на языке K-теории) действуют

в комбинаторной теории и даже в топологической теории (как это следует из триангуляционных теорем Кирби — Зибенмана). Комбинируя эти симметрии с периодичностью в геометрической теории, можно продолжить программу Адамса в следующих направлениях:

1) гомотопические соотношения, связанные с действием группы Галуа, имеют место и в топологической теории и в ней тоже универсальны;

2) можно явно описать действие группы Галуа в топологических терминах;

3) для векторного расслоения E сигнатурный инвариант имеет аналитическое описание [Δ_E в $K_{\mathbf{C}}(E)$], и топологический тип расслоения E описывается с помощью действия группы Галуа на этот инвариант.

В качестве следствия получается, что два различных векторных расслоения, неподвижных по отношению к элементам конечного порядка группы Галуа, различны топологически. Например, при $p=3$ кручение группы Галуа порождается комплексным сопряжением, и, следовательно, любые два неизоморфных векторных расслоения, локализованные по простому числу 3, топологически различны.

Используемая нами периодичность есть периодичность в теории послойной гомотопической эквивалентности между PL- или топологическими расслоениями (см. гл. 6, § 4).

При этом в случае нечетных простых чисел теория становится изоморфной K-теории, а геометрическая периодичность превращается в периодичность Ботта. (В неодносвязной ситуации периодичность имеет красивую алгебраическую переформулировку в терминах групп Уолла.)

Результаты гл. 6 требуют предварительных рассмотрений, производимых в первых пяти главах, главным образом в гл. 3 и 5.

В гл. 3 строится p-адическое пополнение гомотопического типа. Результатом конструкции является некоторый гомотопический тип вместе с дополнитель-

ной структурой [1]), компактной топологией на определяемом им контравариантном функторе.

Используя p-адический гомотопический тип для всех p и рациональный гомотопический тип (см. гл. 2), можно восстановить классический гомотопический тип.

При этом у возникающих p-адических гомотопических типов часто имеются симметрии, которые в классическом случае или отсутствуют, или выявляются с трудом. Например, в гл. 4, в которой обсуждаются p-адические сферические расслоения, мы покажем, как с помощью дополнительной симметрии p-адического пополнения проективного пространства $\mathbb{C}P^{\infty}$ можно построить теорию главных сферических расслоений (по одной такой теории для каждого делителя числа $p-1$).

Другое важное свойство p-адических гомотопических типов заключается в том, что они могут быть построены с помощью гротендиковской теории этальных когомологий в алгебраической геометрии. Длинная пятая глава посвящена изложению этальной теории, которую мы делаем более явной с помощью конструкции Лабкина, аналогичной конструкции Чеха. Эта конструкция геометрически очень содержательна и должна иметь много приложений в геометрической гомотопической теории [2]).

Для того чтобы построить p-адические гомотопические типы, мы используем технику проективных пределов, построенную в гл. 3. Арифметический квадрат, построенный в этой же главе, показывает, что́ надо добавить к этальному гомотопическому типу для того, чтобы восстановить классический гомотопический тип.

Далее, мы детально изучаем симметрии Галуа на векторных расслоениях и в заключение пытаемся проанализировать «вещественные многообразия». Эта попытка приводит к интересной топологической гипотезе.

---

[1]) В интересных случаях эта дополнительная структура является «внутренней» по отношению к гомотопическому типу.

[2]) На самом деле это только начало.

В первой главе содержится алгебраическое введение и вводятся некоторые понятия, используемые в последующих главах. В ней содержатся примеры проконечных групп в алгебре и в топологии, которые нам будут нужны в дальнейшем.

В планируемой второй части мы подробно изучим случай простого числа 2 и постараемся интерпретировать результаты главы 6 этой части на языке многообразий. Кроме того, там мы продолжим изучение локализации многообразий в связи с интересными примерами из алгебры и геометрии.

Наконец, я пользуюсь возможностью выразить свою благодарность Джону Моргану из Принстонского университета, который написал предварительный текст первых лекций. Я уверен, что без его помощи моя работа не появилась бы на свет ни теперь, ни в ближайшем будущем.

Кроме того, вычисления, проделанные Грегом Брамфелем, оказали мне неоценимую психологическую помощь в начале работы. Наши беседы в Принстоне в 1967 г. и последующие годы доставили мне большое удовольствие и принесли большую пользу.

Д. Сулливан

Глава 1

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ

Мы начинаем с общих алгебраических конструкций: локализации и пополнения колец и групп. Будут изучены свойства этих операций и связи между ними.

§ 1. ЛОКАЛИЗАЦИЯ

Если не оговорено противное, то все кольца будут предполагаться имеющими единицу и не имеющими делителей нуля.

Пусть R — кольцо. Множество $S \subseteq R - \{0\}$ мы назовем *мультипликативной системой*, если $1 \in S$ и из $a,\ b \in S$ следует, что $ab \in S$.

Определение 1.1. Пусть $S \subseteq R - \{0\}$ — мультипликативная система. Обозначим через $S^{-1}R$ множество, состоящее из классов эквивалентных дробей r/s, где $r \in R$, $s \in S$ и дробь r'/s' считается эквивалентной дроби r''/s'', если $r's'' = r''s'$. Введем в $S^{-1}R$ структуру кольца, положив

$$[r/s] \cdot [r'/s'] = [rr'/ss'],$$

$$[r/s] + [r'/s'] = \left[\frac{rs' + sr'}{ss'}\right].$$

Построенное кольцо мы будем называть *локализацией* кольца R относительно мультипликативной системы S, а гомоморфизм

$$R \to S^{-1}R,$$

переводящий r в $[r/1]$, — *локализующим гомоморфизмом* или просто *локализацией*.

Пример 1. Если $p \subseteq R$ — простой идеал, то подмножество $R - p$ является мультипликативной системой. Обозначим через R_p кольцо $(R - p)^{-1}R$ и

назовем его *локализацией кольца R относительно p*. В кольце R_p всякий элемент кольца R, не лежащий в p, обратим. Локализующий гомоморфизм $R \to R_p$ переводит идеал p в единственный максимальный идеал кольца R_p, составленный из всех его необратимых элементов.

Например, нулевой идеал является простым, и, очевидно, локализация кольца R относительно этого идеала является полем частных кольца R.

Операция локализации определяется и для R-модулей. Если M есть R-модуль, то его локализация определяется как $S^{-1}R$-модуль $S^{-1}M = M \otimes_R S^{-1}R$.

Интуитивно можно представить себе операцию локализации модуля M как превращение операций умножения в M на элементы множества S в изоморфизмы.

Рассмотрим следующий интересный пример из топологии.

Пример 2 (П. А. Смит, А. Борель, Г. Сигал). Пусть X — локально компактный полиэдр, на котором действует группа второго порядка с образующей T (инволюция). Можно задать вопрос, существует ли связь между гомологиями множества неподвижных точек F и «гомологиями пары (X, T)».

Обозначим через S (стягиваемую) бесконечномерную сферу, на которой действует антиподальная инволюция. Тогда на пространстве $X \times S$ диагональная инволюция свободна и существует единственное с точностью до эквивариантной гомотопии эквивариантное отображение

$$X \times S \to S.$$

Поэтому корректно (с точностью до гомотопии) определено отображение

$$X_T = (X \times S)/T \to S/T = \mathbb{R}P^{\infty},$$

и, следовательно, группа «эквивариантных когомологий пары (X, T)»

$$H^*(X_T; \mathbb{Z}/2)$$

приобретает структуру R-модуля, где

$$R=(\mathbb{Z}/2)[x]=H^*(\mathbb{R}P^\infty;\ \mathbb{Z}/2).$$

В кольце R имеется максимальный идеал (x), порожденный x, и этот идеал прост. Оказывается, что когомологии множества неподвижных точек с коэффициентами в кольце R_x (локализации кольца R относительно идеала (x)) совпадают с локализацией инвариантных когомологий:

$$H^*(F;\ R_x)\cong H^*(X_T;\ \mathbb{Z}/2)_x=H^*(X_T;\ \mathbb{Z}/2)\otimes_R R_x.$$

В большей части нашей работы нам не потребуется общее понятие локализации. В большинстве случаев кольцо R будет кольцом целых чисел и, соответственно, R-модули будут просто абелевыми группами.

Пусть l — некоторое множество простых чисел. Мы назовем «локализацией кольца $\mathbb{Z}$ относительно l» кольцо

$$\mathbb{Z}_l=S^{-1}\mathbb{Z},$$

где S — мультипликативное множество, порожденное простыми числами, *не* входящими в l.

Если l состоит из единственного простого числа p, то можно написать

$$\mathbb{Z}_l=\mathbb{Z}_p,$$

поскольку в этом случае $\mathbb{Z}_l$ есть просто локализация кольца целых чисел относительно простого идеала p.

Отметим еще равенства

$$\mathbb{Z}_{\{\text{все простые числа}\}}=\mathbb{Z}\quad\text{и}\quad\mathbb{Z}_\emptyset=\mathbb{Q}=\mathbb{Z}_0.$$

Нетрудно проверить, что кольцами вида $\mathbb{Z}_l$ исчерпываются подкольца поля $\mathbb{Q}$, содержащие единицу. Ниже мы увидим, что тензорное произведение $\mathbb{Z}_l\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_{l'}$ совпадает с $\mathbb{Z}_{l\cap l'}$, а расслоенное произведение $\mathbb{Z}_l\times_{\mathbb{Q}}\mathbb{Z}_{l'}$ — с $\mathbb{Z}_{l\cup l'}$.

Операция локализации модулей применима, в частности, к произвольной абелевой группе, рассматриваемой как $\mathbb{Z}$-модуль. Для удобства сформулируем отдельно определение локализации абелевой группы.

Определение 1.2. Пусть G — абелева группа. Назовем *локализацией группы G относительно множества l простых чисел* $\mathbb{Z}_l$-модуль $G \otimes \mathbb{Z}_l$; обозначение: G_l. Естественное включение $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_l$ индуцирует *локализующий гомоморфизм* $G \to G_l$. Можно описать локализацию с помощью индуктивного предела. Упорядочим для этого множество произведений простых чисел, не входящих в l, с помощью делимости. Составим, далее, индуктивную систему групп, индексированную элементами этого упорядоченного множества, из групп $G_s = G$ и гомоморфизмов

$$G_s \xrightarrow{\text{умножение на } s/s'} G_{s'} \quad (s \leqslant s').$$

Предложение 1.1.

$$\varinjlim_s G_s \cong G \otimes \mathbb{Z}_l = G_l.$$

Доказательство. Определим отображения

$$G_s \to G \otimes \mathbb{Z}_l$$

формулой $g \longmapsto g \otimes 1/s$. Эти отображения согласованы друг с другом и потому определяют отображение

$$\varinjlim_s G_s \to G \otimes \mathbb{Z}_l.$$

В случае $G = \mathbb{Z}$ ясно, что это отображение является изоморфизмом. (Каждое отображение $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_l$ мономорфно, и, следовательно, индуктивный предел мономорфен. При этом элемент a/s кольца $\mathbb{Z}_l$ является образом элемента a кольца $\mathbb{Z}$ при отображении $\mathbb{Z} = G_s \to \mathbb{Z}_l$.)

Общий случай сводится к рассмотренному, поскольку переход к индуктивному пределу коммутирует с тензорным умножением.

Лемма 1.2. *Если l и l' — два множества простых чисел, то тензорное произведение колец $\mathbb{Z}_l$ и $\mathbb{Z}_{l'}$ изоморфно кольцу $\mathbb{Z}_{l \cap l'}$.*

Доказательство. Определим кольцевой гомоморфизм

$$\mathbb{Z}_l \otimes \mathbb{Z}_{l'} \xrightarrow{\rho} \mathbb{Z}_{l \cap l'},$$

положив $\rho(a/b \otimes a'/b') = aa'/bb'$. Так как b есть произведение простых чисел, не лежащих в l, а b' есть произведение простых чисел, не лежащих в l', то произведение bb' является произведением простых чисел, не лежащих в $l \cap l'$; следовательно, отображение ρ определено корректно.

Чтобы проверить, что ρ есть эпиморфизм, рассмотрим дробь $r/s \in \mathbb{Z}_{l \cap l'}$ и представим s в виде произведения $s_1 s_2$, где s_1 лежит вне l и s_2 лежит вне l'. Тогда $\rho(1/s_1 \otimes r/s_2) = r/s$.

Чтобы показать, что отображение ρ есть мономорфизм, предположим, что

$$\rho\Big(\sum_i a_i/b_i \otimes c_i/d_i\Big) = 0.$$

Тогда $\sum\limits_i a_i c_i/b_i d_i = 0$ и, следовательно,

$$\sum_i \Big(a_i c_i \prod_{j \neq i} b_j d_j\Big) = 0.$$

Последнее означает, что

$$\sum_i a_i/b_i \otimes c_i/d_i = \sum_i a_i c_i (1/b_i \otimes 1/d_i) =$$

$$= \Big(\sum_i a_i c_i \prod_{j \neq i} b_j d_j\Big)\Big(1 \Big/ \prod_h b_h \otimes 1 \Big/ \prod_h d_h\Big) = 0,$$

и, таким образом, отображение ρ не имеет ядра.

Лемма 1.3. *Структура $\mathbb{Z}$-модуля на абелевой группе G продолжается до структуры $\mathbb{Z}_l$-модуля в том и только в том случае, когда группа G изоморфна своей локализации относительно любого множества простых чисел, содержащего l* [1]).

Это следует из предложения 1.1.

Пример 3.

$$(\mathbb{Z}/p^n)_l = \mathbb{Z}/p^n \otimes \mathbb{Z}_l \cong \begin{cases} 0 & \text{при } p \notin l, \\ \mathbb{Z}/p^n & \text{при } p \in l; \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}\text{конечно порожденная} \\ \text{абелева группа } G\end{pmatrix}_l \cong \mathbb{Z}_l \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_l \oplus (l\text{-кручение } G),$$

где число слагаемых $\mathbb{Z}_l$ равно рангу группы G.

---

[1]) Точнее, когда для указанных l локализующий гомоморфизм $G \to G_l$ является изоморфизмом. — *Прим. ред.*

Предложение 1.4. *Локализация переводит точные последовательности абелевых групп в точные последовательности абелевых групп.*

Доказательство. Это тоже следует из предложения 1.1, поскольку индуктивный предел сохраняет точность последовательностей.

Следствие 1.5. *Если* $0 \to A \to B \to C \to 0$ — *точная последовательность абелевых групп и две из этих групп являются* $\mathbb{Z}_l$-*модулями, то и третья группа является* $\mathbb{Z}_l$-*модулем.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму локализации

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \otimes \mathbb{Z}_l} & & \downarrow{\scriptstyle \otimes \mathbb{Z}_l} & & \downarrow{\scriptstyle \otimes \mathbb{Z}_l} & & \\ 0 & \to & A_l & \to & B_l & \to & C_l & \to & 0 \end{array}$$

В силу предложения 1.4 нижняя строка точна, а из предположения и леммы 1.3 следует, что два из трех вертикальных отображений являются изоморфизмами. Согласно лемме о пяти гомоморфизмах, и третье вертикальное отображение является изоморфизмом, и нам остается еще раз применить лемму 1.3.

Следствие 1.6. *Если в длинной точной последовательности*

$$\ldots \to A_n \to B_n \to C_n \to A_{n-1} \to B_{n-1} \to \ldots$$

два из трех множеств групп

$$\{A_n\}, \quad \{B_n\}, \quad \{C_n\}$$

составлены из $\mathbb{Z}_l$-*модулей, то и третье множество составлено из* $\mathbb{Z}_l$-*модулей.*

Это доказывается в точности таким же применением леммы о пяти гомоморфизмах.

Следствие 1.7. *Пусть* $F \to E \to B$ — *расслоение Серра, и пусть пространства* F, E, B *связны и их*

фундаментальные группы абелевы. Тогда если какие-нибудь два из множеств

$$\{\pi_i F\},\quad \{\pi_i E\},\quad \{\pi_i B\}$$

составлены из $\mathbb{Z}_l$*-модулей, то и третье множество составлено из* $\mathbb{Z}_l$*-модулей.*

Это вытекает из следствия 1.6 и точности гомотопической последовательности

$$\ldots \to \pi_i F \to \pi_i E \to \pi_i B \to \ldots.$$

Аналогичное утверждение имеет место и для гомологий.

Предложение 1.8. *Пусть* $F \to E \to B$ *— расслоение Серра, такое, что группа* $\pi_1 B$ *тривиально действует на группах* $\tilde{H}_*(F;\ \mathbb{Z}/p)$ *при любом простом* p*, не лежащем в* l*. Тогда если два из множеств*

$$\{\tilde{H}_i F\},\quad \{\tilde{H}_i E\},\quad \{\tilde{H}_i B\}$$

(целочисленных гомологий) составлены из $\mathbb{Z}_l$*-модулей, то и третье множество составлено из* $\mathbb{Z}_l$*-модулей.*

Доказательство. Из точности коэффициентной последовательности

$$\ldots\ \tilde{H}_i X \xrightarrow{p} \tilde{H}_i X \to \tilde{H}_i(X;\ \mathbb{Z}/p) \to \ldots$$

следует, что группы $\tilde{H}_i X$ являются $\mathbb{Z}_l$-модулями в том и только в том случае, когда группы $\tilde{H}_i(X;\ \mathbb{Z}/p)$ тривиальны для всех простых чисел p, не лежащих в l. Но из спектральной последовательности Серра с коэффициентами в $\mathbb{Z}/p$ видно, что если два из трех множеств

$$\{\tilde{H}_i(F;\ \mathbb{Z}/p)\},\quad \{\tilde{H}_i(E;\ \mathbb{Z}/p)\},\quad \{\tilde{H}_i(B;\ \mathbb{Z}/p)\}$$

состоят из нулей, то и третье множество состоит из нулей.

Замечание. Этим очень простым доказательством предложения 1.8 автор обязан Д. У. Андерсону.

Назовем квадрат абелевых групп

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle l} \\ C & \xrightarrow{k} & D \end{array}$$

расслоенным квадратом, если последовательность

$$0 \to A \xrightarrow{i \oplus j} B \oplus C \xrightarrow{l-k} D \to 0$$

точна.

Лемма 1.9. *Индуктивный предел расслоенных квадратов является расслоенным квадратом.*

Доказательство: индуктивный предел точных последовательностей является точной последовательностью.

Предложение 1.10. *Пусть G — абелева группа, и пусть l, l' — такие множества простых чисел, что*

$$l \cap l' = \emptyset,\quad l \cup l' = \{\text{все простые числа}\}.$$

Тогда

$$\begin{array}{ccc} G & \to & G \otimes \mathbb{Z}_l \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \otimes \mathbb{Z}_{l'} & \to & G \otimes \mathbb{Q} \end{array}$$

есть расслоенный квадрат.

Доказательство. *Случай* 1. Если $G = \mathbb{Z}$, то нетрудно проверить, что последовательность

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_l \oplus \mathbb{Z}_{l'} \to \mathbb{Q} \to 0$$

точна.

Случай 2. Если $G = \mathbb{Z}/p^a$, то квадрат имеет вид

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/p^a & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}/p^a & \to & 0 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/p^a & \to & \mathbb{Z}/p^a \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & 0 \end{array}$$

Случай 3. Если G — конечно порожденная группа, то она является конечной прямой суммой групп, рассматривавшихся в первых двух случаях.

Общий случай. Произвольная абелева группа является индуктивным пределом конечно порожденных абелевых групп, и наше утверждение следует из леммы 1.9 и случая 3.

Доказанное предложение можно переформулировать следующим образом: группа G является расслоенным произведением своих локализаций G_l и $G_{l'}$ над G_0.

В заключение укажем на следующее обобщение предложения 1.10.

Метапредложение 1.11. *Составим бесконечную диаграмму*

$$\begin{array}{ccc} G_2 & G_3 & G_5 \ldots \\ \searrow & \downarrow & \swarrow \\ & G_0 & \end{array}$$

Группа G является бесконечным расслоенным произведением своих локализаций G_2, G_3, ... над G_0.

Доказательство. Из предыдущего предложения следует, что группа $G_{2,3}$ является расслоенным произведением групп G_2 и G_3 над G_0. Далее, группа $G_{2,3,5}$ является расслоенным произведением групп $G_{2,3}$ и G_5 над G_0 и т. д.

§ 2. ПОПОЛНЕНИЯ

Теперь мы перейдем к рассмотрению пополнений колец и групп. Из колец нас будет, как и раньше, интересовать главным образом кольцо целых чисел, для которого мы будем рассматривать «арифметические пополнения». В случае же групп мы рассмотрим проконечные пополнения, а для абелевых групп — связанные с ними формальные пополнения. В конце главы мы рассмотрим некоторые примеры проконечных групп, встречающиеся в топологии и в алгебре, и обсудим строение группы p-адических единиц. Наконец, мы изучим связи между операциями локализации и пополнения, для чего построим некоторые расслоенные квад-

раты, которые впоследствии появятся снова — уже на уровне CW-комплексов.

Пополнения колец; p-адические числа. Пусть R — кольцо, и пусть

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$$

— убывающая последовательность его идеалов с

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} I_j = \{0\}.$$

С помощью этих идеалов можно определить в кольце R метрику, положив

$$d(x, y) = e^{-k}, \quad e > 1,$$

если $x-y \in I_k$, но $x-y \notin I_{k+s}$ $(I_0 = R)$. Если $x-y \in I_k$ и $y-z \in I_k$, то $x-z \in I_{\min(k, l)}$. Поэтому имеет место сильное неравенство треугольника

$$d(x, z) \leqslant \max(d(x, y), d(y, z)).$$

Кроме того, если $d(x, y) = 0$, то $x - y \in \bigcap_{j=0}^{\infty} I_j = \{0\}$. Поэтому функция d действительно является метрикой в R.

Определение 1.3. Пусть R — кольцо с метрикой d. Определим пополнение $\widehat{R}_d$ кольца R относительно метрики d при помощи фундаментальных последовательностей. Другими словами, рассмотрим в кольце R такие последовательности $\{x_n\}$, что

$$\lim_{n, m \to \infty} d(x_n, x_m) = 0$$ [1].

Последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ считаются эквивалентными, если $d(x_n, y_n) \to 0$. Обозначим множество классов эквивалентных фундаментальных последователь-

---

[1] В нашем случае это требование эквивалентно условию $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$.

ностей через $\hat{R}_d$ и определим в $\hat{R}_d$ структуру топологического кольца, положив

$$[\{x_n\}]+[\{y_n\}]=[\{x_n+y_n\}],$$
$$[\{x_n\}]\cdot[\{y_n\}]=[\{x_n y_n\}].$$

Имеется естественный пополняющий гомоморфизм

$$R \xrightarrow{c} \hat{R}_d,$$

переводящий элемент r в последовательность $\{r, r, \ldots\}$. Гомоморфизм c обладает свойством универсальности относительно непрерывных гомоморфизмов кольца R в полные топологические кольца.

Пример 1. Пусть $R=\mathbb{Z}$ и $I_j=(p^j)$, где p — простое число. Индуцируемая последовательностью I_j топология есть не что иное, как p-адическая топология в $\mathbb{Z}$, а пополнение есть кольцо $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел.

Кольцо целых p-адических чисел было введено Гензелем при изучении диофантовых уравнений. Решение диофантова уравнения в кольце $\hat{\mathbb{Z}}_p$ равносильно решению соответствующих диофантовых сравнений по модулю высоких степеней числа p. Решение диофантовых сравнений по всем модулям эквивалентно решению соответствующего уравнения во всех кольцах p-адических чисел. Некоторые нетривиальные полиномы полностью распадаются над кольцом $\hat{\mathbb{Z}}_p$. Таков, например, полином

$$x^{p-1}-1$$

(см. доказательство предложения 1.16). Поэтому в этом случае (и во многих других случаях) мы имеем возможность изучать независимо проекции известных проблем над кольцом $\mathbb{Z}$ в различные p-адические числа, располагая каждый раз таким дополнительным средством, как корни $(p-1)$-й степени из единицы.

Пример 2. Пусть l — непустое множество простых чисел $(p_1, p_2, \ldots)$, и пусть

$$I_j^l=(p_1^j p_2^j \ldots p_j^j).$$

Индуцируемая последовательностью I_j топология есть l-адическая топология в $\mathbb{Z}$, и соответствующее пополнение обозначается через $\hat{\mathbb{Z}}_l$.

Если $l' \subseteq l$, то $I_j^l > I_j^{l'}$ и всякая фундаментальная последовательность в l-адической топологии будет фундаментальной последовательностью и в l'-адической топологии. Благодаря этому определено отображение

$$\hat{\mathbb{Z}}_l \to \hat{\mathbb{Z}}_{l'}.$$

Предложение 1.12. *Рассмотрим проективную систему колец* $\{\mathbb{Z}/p^n\}$, *в которой гомоморфизм* $\mathbb{Z}/p^n \to \to \mathbb{Z}/p^m$ $(n \geqslant m)$ *определяется как приведение* $\operatorname{mod} p^m$. *Существует естественный кольцевой изоморфизм*

$$\hat{\mathbb{Z}}_p \xrightarrow[\cong]{\rho_p} \varprojlim \mathbb{Z}/p^n.$$

Доказательство. Прежде всего определим для каждого натурального n кольцевой гомоморфизм

$$\hat{\mathbb{Z}}_p \xrightarrow{\rho_n} \mathbb{Z}/p^n.$$

Если $\{x_i\}$ — фундаментальная последовательность в кольце $\mathbb{Z}$, то вычеты $\operatorname{mod} p^n$ чисел x_i при достаточно большом i не зависят от i, и мы полагаем

$$\rho_n[\{x_i\}] = \{\text{стабильный вычет } x_i\}.$$

Ясно, что если последовательность $\{x_i\}$ эквивалентна последовательности $\{y_i\}$, то при достаточно большом i разность $x_i - y_i$ делится на p^n; следовательно, отображение ρ_n определено корректно.

Нетрудно проверить, что построенные гомоморфизмы ρ_n согласованы с отображениями, составляющими проективную систему. Значит, они определяют гомоморфизм

$$\hat{\mathbb{Z}}_p \xrightarrow{\hat{\rho}_p} \varprojlim \mathbb{Z}/p^n.$$

Гомоморфизм $\hat{\rho}_p$ является мономорфизмом. Действительно, если $\hat{\rho}_p\{x_i\} = 0$, то для каждого натурального n почти все члены последовательности $\{x_i\}$ делятся

на p^n, т. е. лежат в идеале I_n. Но это и означает, что последовательность $\{x_i\}$ эквивалентна последовательности $\{0, 0, 0, \ldots\}$.

Гомоморфизм $\hat{\rho}_p$ является эпиморфизмом. Действительно, пусть $\{r_n\}$—последовательность вычетов $\bmod p^n$, задающая элемент кольца $\varprojlim \mathbb{Z}/p^n$. Выберем последовательность $\{\tilde{r}_n\}$ целых чисел, лежащих в соответствующих классах вычетов. Очевидно, последовательность $\{\tilde{r}_n\}$ фундаментальна и

$$\rho_p\{\tilde{r}_n\} = (r_n) \in \varprojlim \mathbb{Z}/p^n.$$

Следствие. *Кольцо $\hat{\mathbb{Z}}_p$ компактно.*

Доказательство. Изоморфизм ρ_p непрерывен в топологии проективного предела в $\varprojlim \mathbb{Z}/p^n$.

Предложение 1.13. *Произведение естественных отображений $\hat{\mathbb{Z}}_l \to \hat{\mathbb{Z}}_p$, $p \in l$, индуцирует кольцевой изоморфизм*

$$\hat{\mathbb{Z}}_l \to \prod_{p \in l} \hat{\mathbb{Z}}_p.$$

Доказательство. Рассуждения, использованные при доказательстве предложения 1.12, показывают, что кольцо $\hat{\mathbb{Z}}_l$ является проективным пределом конечных колец

$$\mathbb{Z}/p_1^j \ldots p_j^j, \quad l = \{p_1, p_2, \ldots\}.$$

Но

$$\varprojlim_j \mathbb{Z}/p_1^j \ldots p_j^j = \varprojlim_j \prod_{i=1}^{j} \mathbb{Z}/p_i^j = \varprojlim_{(n,j)} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}/p_i^j =$$

$$= \varprojlim_n \varprojlim_j \prod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}/p_i^j = \varprojlim_n \prod_{i=1}^{n} \varprojlim_j \mathbb{Z}/p_i^j =$$

$$= \varprojlim_n \prod_{i=1}^{n} \hat{\mathbb{Z}}_{p_i} = \prod_{p \in l} \hat{\mathbb{Z}}_p.$$

Замечание. Кольцо $\hat{\mathbb{Z}}_l$ имеет единицу, но в случае, когда множество l содержит более одного простого

числа, в нем есть делители нуля. Кольцо $\hat{\mathbb{Z}}_l$ компактно, и целые числа плотны в нем.

Пример 3 ($K(\mathbb{R}P^\infty)$, М. Атья). Обозначим через R кольцо виртуальных комплексных представлений группы $\mathbb{Z}/2$. Хорошо известен изоморфизм

$$R \cong \mathbb{Z}[x]/(x^2-1),$$

при котором элементу $n+mx$ соответствует представление

$$1 \mapsto \left[\begin{array}{ccccccc} 1 &&&&&& \\ & 1 &&&&& \\ && \ddots &&&& \\ &&& 1 &&& \\ &&&& -1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\ \ddots\\1\end{array}}\right\} n \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}-1\\ \ddots\\-1\end{array}}\right\} m \end{array}$$

группы $\mathbb{Z}/2$ в пространстве $\mathbb{C}^{n+m}$. Обозначим через I_j идеал, порожденный элементом $(x-1)^j$. Тогда пополнение кольца R относительно последовательности идеалов I_j канонически изоморфно комплексному K-функтору пространства $\mathbb{R}P^\infty$:

$$\hat{R} \cong K(\mathbb{R}P^\infty) = [\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}\times BU].$$

Нетрудно проверить, что аддитивная группа кольца $\hat{R}$ изоморфна счетной сумме групп целых 2-адических чисел.

Пример 4 ($K(\mathrm{Fix})$, М. Атья и Г. Сигал). Рассмотрим снова компактное топологическое пространство X с инволюцией T и обозначим через F множество неподвижных точек инволюции T, а через X_T «теоретико-гомотопическое пространство орбит» $X_T = X\times S^\infty/((x, s)\sim(Tx, -s))$.

Обозначим, далее, через $K_G(X)$ кольцо Гротендика эквивариантных векторных расслоений над X. Ясно, что $K_G(X)$ есть R-алгебра, где R — кольцо предыдущего примера. Эта алгебра является тонким инвариантом геометрической структуры пары (X, T). Тем не менее Атья и Сигал показали, что

(i) пополнение алгебры $K_G(X)$ относительно последовательности идеалов $(x-1)^i K_G(X)$ совпадает с K-функтором пространства X_T;

(ii) пополнение алгебры $K_G(X)$ относительно последовательности идеалов $(x+1)^i K_G(X)$ связано с $K(F)$.

Если мы пополним алгебру $K_G(X)$ относительно семейства идеалов $(x-1, x+1)^i K_G(X)$ (что эквивалентно 2-адическому пополнению, так как $(x-1, x+1)^2 \subseteq (2) \subseteq (x-1, x+1)$), то мы получим изоморфизм

$$K(F) \otimes \hat{\mathbb{Z}}_2[x]/(x^2-1) \cong K(X_T)\hat{{}_2}.$$

В гл. 5 мы используем это соотношение, чтобы получить «алгебраическое описание» K-функтора (тензорно умноженного над целыми 2-адическими числами на групповое кольцо группы $\mathbb{Z}/2$) множества вещественных точек вещественного алгебраического многообразия.

Пополнения групп. Мы рассмотрим для групп два типа пополнений. Прежде всего изучим проконечные пополнения.

Пусть G — произвольная группа и l — *непустое* множество простых чисел. Обозначим через $\{H\}_l$ множество таких нормальных подгрупп H группы G, что индекс $G:H$ конечен и разлагается на простые множители, лежащие в l. Мы частично упорядочиваем $\{H\}_l$, полагая $H_1 \leqslant H_2$, если $H_1 \supseteq H_2$.

Определение 1.4. Проективный предел конечных l-факторов группы G,

$$\hat{G}_l = \varprojlim_{\{H\}_l} (G/H),$$

называется *l-проконечным пополнением группы G*.

Топологизируем l-проконечное пополнение $\widehat{G}_l$ группы G как проективный предел дискретно топологизированных групп G/H. В результате $\widehat{G}_l$ становится компактной нульмерной топологической группой, и ясно, что естественное отображение

$$G \to \widehat{G}_l$$

универсально относительно отображений группы G в конечные l-группы[1]).

Конструкция l-проконечного пополнения функториальна. Действительно, произвольный гомоморфизм $f\colon G \to G'$ индуцирует, ввиду наличия диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
H = f^{-1}H' & \to & H' \\
\downarrow & & \downarrow \\
G & \xrightarrow{f} & G' \\
\downarrow & & \downarrow \\
G/H & \xrightarrow{f} & G'/H'
\end{array}$$

проективное семейство отображений

$$G/H \xrightarrow{f} G'/H', \quad H = f^{-1}H'$$

и, следовательно, определяет гомоморфизм

$$\widehat{G}_l = \varprojlim G/H \xrightarrow{f} \varprojlim G'/H' = \widehat{G}'_l.$$

Примеры. 1) Пусть $G = \mathbb{Z}$ и $l = \{p\}$. Ясно, что p-факторы группы $\mathbb{Z}$ исчерпываются группами $\mathbb{Z}/p^n$. Поэтому

$$\{p\text{-проконечное пополнение группы } \mathbb{Z}\} = \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n;$$

последний же предел есть не что иное (аддитивно), как теоретико-кольцевое p-адическое пополнение кольца $\mathbb{Z}$ (кольцо целых p-адических чисел).

---

[1]) То есть что любой гомоморфизм группы G в конечную l-группу единственным образом распространяется на $\widehat{G}_l$.

2) Пусть $G = \mathbb{Z}$, а $l = \{p_1, p_2, \ldots\}$. Тогда

$$\mathbb{Z}_l = \varprojlim_{\alpha} \mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1} \ldots p_i^{\alpha_i},$$

где

$$\alpha = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, 0, 0, 0, \ldots)\}$$

есть множество последовательностей неотрицательных показателей, из которых лишь конечное число отлично от нуля, упорядоченное по правилу:

$$\alpha \leqslant \alpha', \text{ если } \alpha_i \leqslant \alpha'_i \text{ при всех } i.$$

Так как последовательность $\{\alpha_k\}$, где

$$\alpha_k = \{\underbrace{k, k, \ldots, k}_{k \text{ раз}}, 0, 0, 0, \ldots),$$

конфинальна, то

$$\hat{\mathbb{Z}}_l = \varprojlim_{k} \prod_{i=0}^{k} \mathbb{Z}/p_i^k = \prod_{p \in l} \varprojlim_{k} \mathbb{Z}/p_i^k = \prod_{p \in l} \hat{\mathbb{Z}}_p.$$

3) Для любой абелевой группы G

$$\hat{G}_l \cong \prod_{p \in l} \hat{G}_p.$$

4) Если G — конечно порожденная абелева группа ранга n, то

$$\hat{G}_l \cong G \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{\mathbb{Z}}_l \cong \underbrace{\hat{\mathbb{Z}}_l \oplus \ldots \oplus \hat{\mathbb{Z}}_l}_{n \text{ слагаемых}} \oplus (l\text{-кручение группы } G).$$

5) Если группа G является l-делимой, то ее l-проконечное пополнение тривиально; например, $\hat{\mathbb{Q}}_l = 0$, $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_l = 0$.

6) p-проконечное пополнение бесконечной прямой суммы $\bigoplus\limits^{\infty} \mathbb{Z}/p$ есть бесконечное прямое произведение $\prod\limits^{\infty} \mathbb{Z}/p$.

Из этих примеров мы видим, что функтор проконечного пополнения точен на категории конечно порожденных абелевых групп, но не точен на категории всех

абелевых групп; например, точная последовательность

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

переходит после пополнения в последовательность

$$0 \to \hat{\mathbb{Z}}_l \to 0 \to 0 \to 0.$$

Следующая модификация конструкции проконечного пополнения приводит к функтору пополнения, точному уже на всей категории абелевых групп.

Определение 1.5. *Формальным l-пополнением* абелевой группы G называется группа

$$\bar{G}_l = G \otimes \hat{\mathbb{Z}}_l.$$

Ясно, что формальное l-пополнение конечно порожденной абелевой группы совпадает с ее проконечным l-пополнением.

Предложение 1.14. *Функтор $G \mapsto \bar{G}_l$ точен. Кроме того, он является единственным функтором, совпадающим на категории конечно порожденных абелевых групп с проконечным пополнением и коммутирующим с переходом к прямому пределу.*

Доказательство. Первое утверждение следует из отсутствия у группы $\hat{\mathbb{Z}}_l$ кручения, а второе вытекает из двух очевидных фактов:

(i) любая абелева группа является индуктивным пределом своих конечно порожденных подгрупп;

(ii) тензорное умножение коммутирует с переходом к прямому пределу.

Если l есть множество всех простых чисел, то группа $\hat{G}_l$ называется просто проконечным пополнением группы G и обозначается через $\hat{G}$, а группа $\bar{G}_l$ называется формальным пополнением группы G и обозначается через $\bar{G}$. Очевидно, $\bar{G} = G \otimes \bar{\mathbb{Z}} = G \otimes \hat{\mathbb{Z}}$.

Заметим, что проконечное пополнение $\hat{G}$ группы G полно. В самом деле, пусть $\{\hat{H}\}$ — частично упорядоченное множество *открытых* подгрупп группы G,

имеющих конечный индекс; тогда

$$\widehat{G} \overset{*}{\cong} \varprojlim_{\{\widehat{H}\}} \{\widehat{G}/\widehat{H}\} \text{ (= «непрерывное пополнение группы } \widehat{G}\text{»).}$$

Иногда оказывается, что любая подгруппа группы $\widehat{G}$, имеющая конечный индекс, открыта. Это верно, например, в случае $\widehat{G}=\widehat{\mathbb{Z}}$ и вообще в случае конечно порожденной абелевой группы G. В этих случаях топология группы $\widehat{G}$ восстанавливается по ее групповой структуре с помощью изоморфизма $*$.

Топология не определяется групповой структурой, например, в случае группы

$$\prod^{\infty} \mathbb{Z}/p = \{\text{проконечное пополнение группы } \overset{\infty}{\bigoplus} \mathbb{Z}/p\}.$$

Примеры из топологии и алгебры. Теперь мы рассмотрим некоторые интересные примеры «проконечных групп».

1) Пусть X — бесконечный комплекс и h^* — некоторая экстраординарная теория когомологий. Предположим, что для каждого i группа $\pi_i(X)$ конечна, а группа $h^i(\mathrm{pt})$ является конечно порожденной (или наоборот). Тогда для каждого i приведенная группа $\tilde{h}^i(X)$ будет проконечной группой. Например, приведенный K-функтор пространства $\mathbb{R}P^\infty$ есть группа целых 2-адических чисел.

Проконечность группы $\tilde{h}^i(X)$ следует из формулы

$$\tilde{h}^i(X) = \varprojlim_{n} \tilde{h}^i \quad (n\text{-й остов } X)$$

и того факта, что группы $\tilde{h}^i$ (n-й остов X) по существу являются конечными[1]).

---

[1]) В данном случае «по существу» означает, что конечен образ гомоморфизма включения $\tilde{h}^i$ (($n+1$)-й остов) $\to \tilde{h}^i$ (n-й остов). Заметим еще, что общепринятая аксиоматика экстраординарных когомологий охватывает лишь конечные комплексы. Здесь подразумевается распространение этой аксиоматики на категорию всех комплексов, включающее аксиому $h^*(\varinjlim X_n) = \varprojlim h^*(X_n)$; основным дефектом так определяемых экстраординарных когомологий является неточность последовательностей пар. — *Прим. ред.*

2) Пусть K — бесконечное нормальное расширение поля k. Тогда K есть объединение конечных нормальных расширений поля k:

$$K = \bigcup_{\infty} L.$$

Поэтому группа Галуа поля K над k является проконечной:

$$\mathrm{Gal}(K/k) = \varprojlim_{\{L\}} \mathrm{Gal}(L/k).$$

Рассмотрим подробнее четыре примера такой ситуации.

(i) Пусть k есть простое поле F_p и $K = \widetilde{F}_p$ — алгебраическое замыкание поля F_p. Тогда K является объединением полей F_{p^n}, состоящих из p^n элементов, причем F_{p^n} содержится в F_{p^m} в том и только в том случае, когда m делится на n. Упорядочим целые числа согласно делимости. Тогда

$$\mathrm{Gal}(\widetilde{F}_p/F_p) = \varprojlim_{n} \mathrm{Gal}(F_{p^n}/F_p) = \varprojlim_{n} \mathbb{Z}/n = \hat{\mathbb{Z}}.$$

Более того, группа $\mathrm{Gal}(\widetilde{F}_{p^n}/F_p)$ имеет естественную образующую — автоморфизм Фробениуса

$$F_{p^n} \xrightarrow[(x \longmapsto x^p)]{\mathscr{F}} F_{p^n}.$$

(Согласно малой теореме Ферма, $a^p \equiv a \bmod p$, так что $\mathscr{F}$ тривиально действует на F_p.) Степени автоморфизма $\mathscr{F}$ топологически порождают $\hat{\mathbb{Z}}$ (плотны в $\hat{\mathbb{Z}}$). Поля, составленные из элементов, неподвижных относительно степеней автоморфизма $\mathscr{F}$, представляют собой не что иное, как конечные поля, фильтрующие $\widehat{F}_p$.

(ii) Пусть $k = \mathbb{Q}$ (поле рациональных чисел) и $K = A_{\mathbb{Q}}$ получается присоединением к $\mathbb{Q}$ всех корней из единицы. Тогда

$$\mathrm{Gal}(A_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) = \hat{\mathbb{Z}}^*,$$

где $\hat{\mathbb{Z}}^*$ — группа обратимых элементов кольца $\hat{\mathbb{Z}}$.

Поле $A_{\mathbb{Q}}$ может быть описано как максимальное абелево расширение поля $\mathbb{Q}$, т. е. как максимальный элемент в частично упорядоченном «множестве» абелевых расширений поля $\mathbb{Q}$ (абелевых групп Галуа).

Разложение

$$\hat{\mathbb{Z}}^* = \prod_p \hat{\mathbb{Z}}_p^*$$

соответствует тому факту, что $A_{\mathbb{Q}}$ является композитом полей

$$A_{\mathbb{Q}}^p = \left\{ \begin{matrix} \mathbb{Q} \text{ с присоединенными корнями} \\ \text{степени } p^\alpha \text{ из единицы} \end{matrix} \right\},$$

а $\mathrm{Gal}\,(A_{\mathbb{Q}}^p/\mathbb{Q})$ есть группа $\mathbb{Z}_p^*$ единиц кольца целых p-адических чисел.

(iii) Пусть $k = \mathbb{Q}$ и $K = \tilde{\mathbb{Q}}$ — алгебраическое замыкание поля $\mathbb{Q}$. Тогда

$$G = \text{«группа Галуа поля } \mathbb{Q}\text{»} = \mathrm{Gal}\,(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) = \varprojlim \mathrm{Gal}\,(K/\mathbb{Q})$$

(предел берется по числовым полям Галуа K) есть проконечная группа исключительной важности.

Кручение группы G невелико: оно исчерпывается элементами второго порядка, соответствующими комплексным сопряжениям. Все эти элементы сопряжены между собой, и каждый из них коммутирует только сам с собой и с единицей. Этой некоммутативности соответствует тот факт, что (гипотетический) 2-адический этальный гомотопический тип *вещественного* алгебраического многообразия (см. гл. 5) не должен, в общем случае, допускать симметрии Галуа.

Заметим также, что группа G определена только с точностью до внутреннего автоморфизма (подобно фундаментальной группе топологического пространства), в то время как ее проконечная абелеанизация

$$G/[G, G]$$

определена канонически (подобно группе одномерных гомологий топологического пространства). Быть может, именно поэтому существует столь красивая теория, дающая описание групп $G/[G, G]$. Эта теория — «тео-

рия полей классов для поля $\mathbb{Q}$» — дает канонический изоморфизм

$$G/[G, G] \cong \hat{\mathbb{Z}}^*.$$

Мы увидим дальше, что $\hat{\mathbb{Z}}^*$-симметрии Галуа, связанные с максимальным абелевым расширением поля $\mathbb{Q}$, буквально пропитывают всю геометрическую топологию: они появляются в кусочно линейной теории, в C^∞-теории и даже в топологической теории.

(iv) Мы увидим ниже (см. предложение 1.16), что группа p-адических единиц естественно изоморфна прямой сумме некоторой конечной группы и аддитивной группы целых p-адических чисел, точнее, что

$$\hat{\mathbb{Z}}_p^* \cong (\mathbb{Z}/p-1) \oplus \hat{\mathbb{Z}}_p \quad (p > 2).$$

Поэтому имеются групповые гомоморфизмы

$$\hat{\mathbb{Z}} \to \hat{\mathbb{Z}}^*,$$

нетривиально отображающие группу $\hat{\mathbb{Z}}_p$ в группы $\hat{\mathbb{Z}}_q^*$ с $q = p$ и $q \equiv 1 \bmod p$.

Возникающая при этом диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{Z}}^* \\ \| & & \| \\ \text{«группа Галуа } F_p\text{»} & & \text{абелеанизация} \\ & & \text{«группы Галуа } \mathbb{Q}\text{»} \end{array}$$

позволит нам связать «случай характеристики p» со «случаем характеристики нуль».

Единицы кольца целых p-адических чисел. Кроме этих интересных алгебраических явлений, в p-адическом случае важную роль играют также аналитические соображения. Например, с помощью p-адических аналитических функций log и exp можно доказать такое

Предложение 1.16. *Существует каноническое расщепление (проконечной) группы единиц кольца целых p-адических чисел:*

$$\hat{\mathbb{Z}}_p^* \cong (\mathbb{Z}/p-1) \oplus \hat{\mathbb{Z}}_p \quad \textit{при} \quad p > 2,$$
$$\hat{\mathbb{Z}}_2^* \cong (\mathbb{Z}/2) \oplus \hat{\mathbb{Z}}_2.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $p > 2$. Так как мультипликативная группа F_p^* конечного поля F_p изоморфна $\mathbb{Z}/p-1$, то имеется точная последовательность

$$1 \to U \xrightarrow{\text{включение}} \hat{\mathbb{Z}}_p^* \xrightarrow{\text{редукция mod } p} (\mathbb{Z}/p-1) \to 1,$$

где U — подгруппа группы единиц, составленная из элементов вида $1+u$ с $u \equiv 0 \bmod p$.

Первый шаг. Определим каноническое расщепление T

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & U \arrow[r] & \hat{\mathbb{Z}}_p^* \arrow[r] & (\mathbb{Z}/p-1) \arrow[r] \arrow[l, bend right, dotted, "T"'] & 1. \end{tikzcd}$$

Для этого рассмотрим эндоморфизм $x \longmapsto x^p$ группы $\hat{\mathbb{Z}}_p^*$ и будем его неограниченно итерировать (динамическая система Фробениуса на $\hat{\mathbb{Z}}_p^*$). Так как порядок группы единиц кольца $\mathbb{Z}/p^k$ равен $p^{k-1}(p-1)$, то для любого $x \in \hat{\mathbb{Z}}_p^*$ имеют место сравнения Ферма

$$\begin{aligned} x^{p-1} &\equiv 1 \,(\bmod p), \\ x^{p(p-1)} &\equiv 1 \,(\bmod p^2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{p^{k-1}(p-1)} &\equiv 1 \,(\bmod p^k), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Эти сравнения показывают, что ряд

$$\bar{x} = x + (x^p - x) + (x^{p^2} - x^p) + \ldots,$$

определяющий «представитель Тайхмюллера $\bar{x}$», сходится для любого $x \in \hat{\mathbb{Z}}_p^*$. В то же время

$$\bar{x} = \lim_{n \to \infty} x^{p^n}.$$

Значит, каждая точка $x \in \hat{\mathbb{Z}}_p^*$ при многократном повторении эндоморфизма Фробениуса $x \longmapsto x^p$ стремится к стационарной точке этого эндоморфизма. Но бино-

миальная формула

$$(a+pb)^{p^n}=\sum_{l+k=p^n}\binom{p^n}{l}a^l(pb)^k=a^{p^n}+$$

$$+p^n\left(\sum_{\substack{l+k=p^n\\ k>0}}\frac{(p^n-1)(p^n-2)\dots(p^n-(k-1))}{1\cdot 2\dots(k-1)}\left(\frac{p^k}{k}\right)a^lb^k\right)$$

показывает, что

$$(a+pb)^{p^n}\equiv a^{p^n}\,(\mathrm{mod}\,p^n).$$

Таким образом, $\bar{x}$ зависит только от вычета элемента $x\ \mathrm{mod}\,p$. Следовательно, каждый класс смежности по подгруппе U стягивается под действием итерированного эндоморфизма Фробениуса к одной точке. Ясно, что полученные $(p-1)$ точек образуют в $\hat{\mathbb{Z}}_p^*$ подгруппу, и эта подгруппа изоморфно отображается гомоморфизмом $\hat{\mathbb{Z}}_p^*\to(\mathbb{Z}/p-1)$ нашей последовательности на $\mathbb{Z}/p-1$. Обратный изоморфизм группы $\mathbb{Z}/p-1$ на эту подгруппу и принимается за T.

Второй шаг. Определим теперь канонический изоморфизм

$$U\xrightarrow{\cong}\hat{\mathbb{Z}}_p.$$

Точнее, мы построим пару взаимно обратных изоморфизмов

$$U\underset{e}{\overset{l}{\rightleftarrows}}p\hat{\mathbb{Z}}_p\subseteq\hat{\mathbb{Z}}_p.$$

Во-первых, положим

$$(1+u)\xrightarrow{l}\log(1+u)=u-u^2/2+u^3/3-\dots.$$

Нетрудно проверить, что этот ряд имеет смысл и сходится. Действительно, если $u=pv$, то n-й член u^n/n при любом n лежит в $p\hat{\mathbb{Z}}_p$ и стремится к нулю при $n\to\infty$ (этого достаточно для сходимости ряда в этой неархимедовой ситуации).

Отображение e мы построим с помощью экспоненты:

$$x \overset{e}{\longmapsto} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

Функция e определена для всех x из максимального идеала

$$p\hat{\mathbb{Z}}_p \subseteq \hat{\mathbb{Z}}_p.$$

Как и в предыдущем случае, используя соотношения $x = py$, можно показать, что (при $p > 2$) последовательность $x^n/n!$ целиком лежит в $\hat{\mathbb{Z}}_p$ и стремится к нулю при $n \to \infty$. Доказательство опирается на соотношение

$$\nu_p(n!) = \left[\frac{n - \varphi_p(n)}{p-1}\right],$$

в котором функция $\nu_p(n)$ определена равенством

$$n = \prod_p p^{\nu_p(n)},$$

а $\varphi_p(n)$ обозначает число ненулевых коэффицентов в разложении

$$n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots .$$

Так как в кольце формальных степенных рядов $e^{\log x} = x$ и $\log e^x = x$, то отображения l и e определяют взаимно обратные изоморфизмы между U и $p\hat{\mathbb{Z}}_p$. Поскольку в группе $\hat{\mathbb{Z}}_p$ нет элементов конечного порядка, то группа $p\hat{\mathbb{Z}}_p$ изоморфна группе $\hat{\mathbb{Z}}_p$. Это завершает доказательство при $p > 2$. В случае $p = 2$ требуются некоторые модификации.

На первом шаге точная последовательность

$$1 \to U \to \hat{\mathbb{Z}}_2^* \xrightarrow{T} \hat{\mathbb{Z}}/2 \to 1$$

строится с помощью приведения по модулю 4 и изоморфизма

$$(\mathbb{Z}/4)^* \cong \mathbb{Z}/2.$$

Расщепление в этом случае получается поднятием группы $\mathbb{Z}/2 = \{0, 1\}$ в группу $\{\pm 1\} \subseteq \hat{\mathbb{Z}}_2^*$.

На втором шаге логарифм по-прежнему определяет отображение

$$U \xrightarrow{l} 2\hat{\mathbb{Z}}_2 \subseteq \hat{\mathbb{Z}}_2,$$

но экспоненциальное отображение определено только на квадрате максимального идеала:

$$4\hat{\mathbb{Z}}_2 \xrightarrow{e} U.$$

Действительно, равенство

$$\nu_2(n!) = n - \varphi_2(n)$$

означает, что дроби $\frac{(2y)^n}{n!}$ лежат в $\hat{\mathbb{Z}}_2$ (и даже четны) при всех n, но они сходятся к нулю только при четном y.

С помощью построенных функций из того, что $\hat{\mathbb{Z}}_2$ не имеет кручения, легко вывести, что и U не имеет кручения. (Доказательство: если $x^n = 1$, то $\log x^n = n \log x = 0$; следовательно, $\log x = 0$ и $x = e^{\log x} = 1$.)

Итак, мы построим отображения

$$U \xleftarrow[\cong]{\substack{\text{возведение}\\ \text{в квадрат}}} U^2 \xrightarrow[\cong]{\log} 4\hat{\mathbb{Z}}_2 \xleftarrow{\text{умножение на 4}} \hat{\mathbb{Z}}_2;$$

отображение log является изоморфизмом в силу коммутативности диаграмм

$$\begin{tikzcd} 4\hat{\mathbb{Z}}_2 \arrow[dr, "\exp"] \arrow[dd, "\text{включение}"'] & \\ & U \arrow[dl, "\log"] \\ 2\hat{\mathbb{Z}}_2 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U^2 \arrow[dr, "\log"] \arrow[dd, "\text{включение}"'] & \\ & 4\hat{\mathbb{Z}}_2 \arrow[dl, "\exp"] \\ U & \end{tikzcd}$$

(Из первой диаграммы видно, что отображение $4\hat{\mathbb{Z}}_2 \xrightarrow{\exp} U$ инъективно, а из второй — что отображение $\exp \cdot \log$ является изоморфизмом на свой образ.)

Замечание. Имеет смысл сравнить расщепления

$$\hat{\mathbb{Z}}_p^* \cong (\mathbb{Z}/p-1) \oplus \hat{\mathbb{Z}}_p, \qquad p \text{ нечетно},$$

$$\hat{\mathbb{Z}}_2^* \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \hat{\mathbb{Z}}_2$$

с расщеплениями

$$\mathbb{C}^* \xrightarrow[\cong]{\frac{1}{2\pi}\arg z \oplus \log|z|} S^1 \oplus \mathbb{R}^+,$$

$$\mathbb{R}^* \xrightarrow[\cong]{\operatorname{sgn} x \oplus \log|x|} (\mathbb{Z}/2) \oplus \mathbb{R}^+,$$

где $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел, $\mathbb{R}^+$ — аддитивная группа поля $\mathbb{R}$ и S^1 — факторгруппа группы $\mathbb{R}^+$ по подгруппе целых чисел.

§ 3. СРАВНЕНИЕ ПОПОЛНЕНИЯ С ЛОКАЛИЗАЦИЕЙ

Сравним теперь операции локализации и пополнения. Напомним соответствующие определения.

Локализация: $G_l = \varinjlim\limits_{(l', l)=1} \{G \xrightarrow{\cdot l'} G \xrightarrow{\cdot l''} G \to \ldots\} = G \otimes \mathbb{Z}_l$.

$\left.\begin{array}{l}\text{Проконечное}\\ l\text{-пополнение}\end{array}\right\}$: $\hat{G}_l = \varprojlim\limits_{\substack{\text{подгруппы}\\ \text{индекса } l}} \left\{\begin{array}{c}\text{конечные } l\text{-факторы}\\ \text{группы } G\end{array}\right\}$.

$\left.\begin{array}{l}\text{Формальное}\\ l\text{-пополнение}\end{array}\right\}$: $\bar{G}_l = G \otimes \hat{\mathbb{Z}}_l = \varinjlim\limits_{\substack{\text{конечно порожденные}\\ \text{подгруппы } H \subseteq G}} \{\hat{H}_l\}$.

Пусть G — абелева группа, и пусть l — непустое множество простых чисел.

Предложение. *Имеется естественная коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
 & G_l = G \otimes \mathbb{Z}_l \arrow[d] \\
G \arrow[ur, "\text{локализация}"] \arrow[r, "\text{формальное } l\text{-пополнение}"] \arrow[dr, "\text{проконечное } l\text{-пополнение}"'] & \bar{G}_l = G \otimes \hat{\mathbb{Z}}_l \arrow[d] \\
 & \hat{G}_l = \varprojlim \left\{\begin{array}{c}\text{конечные } l\text{-факторы}\\ \text{группы } G\end{array}\right\}
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Прежде всего построим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\text{локализация}"] \arrow[dr, "\text{проконечное пополнение}"'] & G_l \arrow[d, "c"] \\ & \widehat{G}_l \end{tikzcd}$$

Для этого напомним, что группа G_l может быть определена как индуктивный предел системы гомоморфизмов

$$G \xrightarrow{\text{умножение на } q} G, \quad (q, p) = 1 \text{ при } p \in l$$

(см. предложение 1.1), и заметим, что гомоморфизм

$$G/H \xrightarrow{\text{умножение на } q} G/H$$

является изоморфизмом для любой подгруппы H группы G конечного l-индекса. Последнее доставляет канонические отображения группы G_l во все конечные l-факторы группы G и через их посредство каноническое отображение группы G_l в их проективный предел $\widehat{G}_l$. Ясно, что получающаяся диаграмма коммутативна.

Далее, используя отображение c и равенство

$$G = \varinjlim_{\alpha} H^{\alpha},$$

где H^{α} — конечно порожденные подгруппы группы G, мы получаем диаграмму

$$G_l \xleftarrow{\text{естественное отображение}} \varinjlim_{\alpha} H_l^{\alpha} \xrightarrow{c} \varinjlim_{\alpha} \widehat{H}_l^{\alpha} \xrightarrow{\text{естественное отображение}} \widehat{G}_l.$$

Здесь первое отображение, очевидно, является изоморфизмом, а третья группа по определению является формальным пополнением $\overline{G}_l$. Итак, мы определили отображения

$$G_l \to \overline{G}_l \to \widehat{G}_l$$

и можем построить обещанную диаграмму. Осталось проверить ее коммутативность. Но верхний треугольник коммутативен, поскольку он является индуктивным пределом треугольников, построенных выше (для конечно порожденных групп), а коммутативность нижнего треугольника вытекает из естественности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\lim H^\alpha \arrow[r] \arrow[dr] & \varinjlim \hat{H}_l^\alpha \arrow[d] \\
& (\lim H^\alpha)_l^\wedge
\end{tikzcd}$$

Следствие. *Если G — конечно порожденная группа, то имеет место коммутативная диаграмма с точными строками и столбцами*

$$\begin{tikzcd}
& & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \{l'\text{-кручение } G\} \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d] & G_l \arrow[d] & \\
& 0 & \hat{G}_l \arrow[l] & \bar{G}_l \arrow[l, "\cong"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

При $G = \mathbb{Z}$ мы получаем последовательность колец

$$\mathbb{Z} \xrightarrow[\text{локализация}]{} \mathbb{Z}_l \xrightarrow[\text{пополнение}]{c} \hat{\mathbb{Z}}_l$$

и естественное отображение $G_l \to \bar{G}_l$ есть $(\mathrm{id}\, G) \otimes c$.

Ясно, что локализация и формальное пополнение коммутируют с прямыми пределами. Следующие примеры показывают, что другие подобные утверждения не верны:

(a) локализация: $[\varprojlim_\alpha \mathbb{Z}/p^\alpha] \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}_p$, но $\varprojlim_\alpha [\mathbb{Z}/p^\alpha \otimes \mathbb{Q}] = 0$;

(b) формальное пополнение: $[\varprojlim_\alpha \hat{\mathbb{Z}}/p^\alpha] \otimes \hat{\mathbb{Z}}_p \neq \hat{\mathbb{Z}}_p = \varprojlim_\alpha (\mathbb{Z}/p^\alpha \otimes \hat{\mathbb{Z}}_p)$;

(c) проконечное пополнение: i) запишем $\mathbb{Q} = \varinjlim \mathbb{Z}$; тогда $\varinjlim \hat{\mathbb{Z}} = \hat{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$, но $\hat{\mathbb{Q}} = 0$; ii) $\varprojlim(\ldots \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z}) = 0$, но $\varprojlim(\ldots \xleftarrow{2} \hat{\mathbb{Z}} \xleftarrow{2} \hat{\mathbb{Z}} \xleftarrow{2} \hat{\mathbb{Z}}) = \prod\limits_{p \neq 2} \hat{\mathbb{Z}}_p$.

Следующие замечания касаются смешанных операций.

(1) Если сначала произвести локализацию, а затем проконечное пополнение, то результат легко описать и он часто равен нулю. Именно,

$$(G_l)\hat{}_{l'} = \begin{cases} \prod\limits_{p \in l \cap l'} \hat{G}_p, & \text{если} \quad l \cap l' \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если} \quad l \cap l' = \emptyset. \end{cases}$$

Полагая, в частности, $(G, l, l') = (\mathbb{Z}, \emptyset, p)$, мы видим, что $\hat{\mathbb{Q}}_p = 0$.

(2) Если сначала произвести локализацию, а затем формальное пополнение, то мы получим новые объекты. Вот два примера.

(i) Группа $(\mathbb{Z}_0)^{-}_{p} = \overline{\mathbb{Q}}_p = \mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}_p$ изоморфна аддитивной группе поля p-адических чисел, которое обычно обозначается через $\mathbb{Q}_p$. Это поле является полем частных кольца $\hat{\mathbb{Z}}_p$ (хотя оно и ненамного больше этого кольца: чтобы получить поле $\mathbb{Q}_p$, достаточно присоединить к $\hat{\mathbb{Z}}_p$ элемент $1/p$). Очевидно, $\mathbb{Q}_p$ является локально компактным метрическим полем (с нормой $\| \ \|_p$), причем единичный круг, т. е. множество элементов x с $\|x\|_p \leqslant 1$, есть $\hat{\mathbb{Z}}_p$. Степенной ряд $\log(1+x)$, который мы рассматривали выше, сходится во внутренней части единичного круга, т. е. в максимальном идеале $p\hat{\mathbb{Z}}_p \subseteq \hat{\mathbb{Z}}_p$. Часто поле $\mathbb{Q}_p$ определяют как пополнение поля рациональных чисел в p-адической метрике. Этим оно похоже на поле вещественных чисел $\mathbb{R}$.

(ii) Группа $(\mathbb{Z}_0)^{-} = \mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}$ является *ограниченным* произведением полей p-адических чисел по всем p. Подробнее:

$$\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}} = \tilde{\prod_p} \mathbb{Q}_p \underset{\neq}{\subset} \prod_p \mathbb{Q}_p$$

есть подмножество бесконечного прямого произведения, состоящее из таких последовательностей

$$(r_2,\ r_3,\ r_5,\ \ldots,\ r_p,\ \ldots)$$

p-адических чисел, в которых все элементы, кроме, быть может, конечного числа, являются целыми p-адическими числами.

Из этого описания видно, что $(Z_0)^{-}$ есть кольцо; это кольцо обозначается через $\bar{\mathbb{Q}}$.

Заметим, что поле $\mathbb{Q}$ естественно вложено в кольцо $\bar{\mathbb{Q}}$ с помощью диагонального вложения

$$n/m \to (n/m,\ n/m,\ \ldots,\ n/m,\ \ldots).$$

Комбинируя это вложение с вложением поля $\mathbb{Q}$ в поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, мы получаем вложение

$$\mathbb{Q} \to \bar{\mathbb{Q}} \times \mathbb{R}$$

Образ поля $\mathbb{Q}$ при этом вложении дискретен и факторгруппа аддитивной группы кольца $\bar{\mathbb{Q}} \times \mathbb{R}$ по аддитивной группе поля $\mathbb{Q}$ компактна. Кольцо $\bar{\mathbb{Q}} \times \mathbb{R}$ называется *кольцом аделей* (для поля $\mathbb{Q}$).

Оказывается, что для любого поля алгебраических чисел можно построить соответствующее ему кольцо аделей и даже по любой алгебраической группе — соответствующую группу аделей (например, для поля $\mathbb{Q}(\xi) = \mathbb{Q}(x)/(x^p - 1)$ или для группы $GL(n, \mathbb{Z})$).

На группах аделей существуют канонические меры, и объем соответствующих арифметических факторов имеет интересные теоретико-числовые интерпретации (см. статью А. Вейля «Адели и алгебраические группы» в сб. «Математика», 8 : 4 (1964)).

Единицы колец аделей называются *иделями*. Они используются при конструкции абелевых расширений числовых полей (глобальная и локальная теория полей классов).

Арифметический квадрат. Теперь мы рассмотрим «расслоенный квадрат», связывающий операции локализации и пополнения. Он возникает при попытке восстановить объект по его локализациям и пополнениям.

Предложение 1.17. *Диаграмма, состоящая из групп (колец) и естественных отображений*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_{(p)} \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "\otimes \mathbb{Q}"'] & \hat{\mathbb{Z}}_p \arrow[d, "\otimes \mathbb{Q}"] \\ \mathbb{Q} \arrow[r, "\otimes \hat{\mathbb{Z}}_p"] & \mathbb{Q}_p \end{tikzcd}$$

$$\|$$

$$\begin{tikzcd} \left\{\begin{matrix}\text{целые числа,}\\ \text{локализованные в } p\end{matrix}\right\} \arrow[r, "\substack{p\text{-адическое}\\ \text{пополнение}}"] \arrow[d, "\substack{\text{локализация}\\ \text{в нуле}}"] & \left\{\begin{matrix}p\text{-адические}\\ \text{целые числа}\end{matrix}\right\} \arrow[d, "\substack{\text{локализация}\\ \text{в нуле}}"] \\ \left\{\begin{matrix}\text{вещественные}\\ \text{числа}\end{matrix}\right\} \arrow[r, "\substack{\text{формальное}\\ p\text{-адическое}\\ \text{пополнение}}"] & \left\{\begin{matrix}p\text{-адические}\\ \text{числа}\end{matrix}\right\} \end{tikzcd}$$

является расслоенным квадратом групп (колец).

Доказательство. Мы должны проверить точность последовательности

$$0 \to \mathbb{Z}_{(p)} \xrightarrow{(\hat{\ }) \oplus (0)} \hat{\mathbb{Z}}_p \oplus \mathbb{Q} \xrightarrow{i-j} \mathbb{Q}_p \to 0,$$

где i, j — естественные вложения

$$\hat{\mathbb{Z}}_p \xrightarrow{\otimes \mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, \quad \mathbb{Q} \xrightarrow{\otimes \hat{\mathbb{Z}}_p} \mathbb{Q}_p.$$

Ясно, что для любого p-адического числа $x \in \mathbb{Q}_p$ существует такое рациональное число n/p^a, что сумма $x + (n/p^a)$ является целым p-адическим числом. Поэтому отображение $i - j$ является эпиморфизмом.

Кроме того, ясно, что у отображения $(\hat{\ }) \oplus (0)$ нет ядра.

Чтобы закончить доказательство, нам осталось заметить, что рациональное число n/m в том и только в том случае является целым p-адическим числом, когда m не делится на p, т. е. когда n/m принадлежит локализации кольца $\mathbb{Z}$ по идеалу p.

Следствие. *Локализация кольца $\mathbb{Z}$ по идеалу p есть расслоенное произведение над полем p-адических*

чисел кольца целых p-адических чисел и поля рациональных чисел.

Предложение 1.18. *Диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{Z}} \\ {\scriptstyle\otimes\mathbb{Q}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\otimes\mathbb{Q}} \\ \mathbb{Q} & \xrightarrow{\otimes\hat{\mathbb{Z}}} & \bar{\mathbb{Q}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & \| \\ \left\{\begin{matrix}\text{целые}\\ \text{числа}\end{matrix}\right\} & \xrightarrow{\substack{\text{проконечное}\\ \text{пополнение}}} & \left\{\begin{matrix}\text{произведение по}\\ \text{всем } p \text{ колец целых}\\ p\text{-адических чисел}\end{matrix}\right\} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\substack{\text{локализация}\\ \text{в нуле}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\substack{\text{локализация}\\ \text{в нуле}}} \\ \left\{\begin{matrix}\text{рациональные}\\ \text{числа}\end{matrix}\right\} & \xrightarrow{\substack{\text{формальное}\\ \text{пополнение}}} & \left\{\begin{matrix}\text{ограниченное произве-}\\ \text{дение по всем } p \text{ полей}\\ p\text{-адических чисел}\end{matrix}\right\} \\ & & \| \\ & & \{\text{«конечные адели»}\} \end{array}$$

является расслоенным квадратом колец.

Доказательство. Опять-таки нам надо проверить точность последовательности

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \oplus \prod_p \hat{\mathbb{Z}}_p \xrightarrow{i-j} \tilde{\prod} \mathbb{Q}_p \to 0$$

(мы используем соотношения

$$\hat{\mathbb{Z}} = \prod_p \hat{\mathbb{Z}}_p,$$

$$\bar{\mathbb{Q}} = \text{ограниченное произведение } \tilde{\prod_p} \mathbb{Q}_p,$$

т. е. совокупность бесконечных последовательностей

$$a = (r_2,\ r_3,\ r_5,\ \ldots)$$

p-адических чисел, из которых все, кроме конечного числа, целые). Нетрудно проверить, что существует такое рациональное число n/m, что сумма $n/m + r_p$

является целым p-адическим числом при всех p. Поэтому отображение $i-j$ является эпиморфизмом.

Как и раньше, доказательство завершается таким замечанием: рациональное число является p-адическим целым при всех p в том и только в том случае, когда оно просто целое.

Следствие. *Кольцо целых чисел является расслоенным произведением поля рациональных чисел и кольца целых аделей (т. е. произведения колец целых p-адических чисел по всем p) над кольцом всех конечных аделей.*

Обобщение: для любой конечно порожденной абелевой группы G и любого непустого множества l простых чисел диаграмма

$$\begin{tikzcd}
G \otimes \mathbb{Z}_l \cong G_l \arrow[rr, "l\text{-адическое пополнение}"] \arrow[dd, "\substack{\text{локализация}\\ \text{в нуле}}"] & & \widehat{G}_l \cong G \otimes \widehat{\mathbb{Z}}_l \arrow[d, "\substack{\text{локализация}\\ \text{в нуле}}"] \\
& & (\widehat{G}_l)_0 \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\
G \otimes \mathbb{Q} \cong G_0 \arrow[rr, "\text{формальное пополнение}"] & & (G_0)_{\bar{l}} \cong G \otimes \mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}_l
\end{tikzcd}$$

является расслоенным квадратом.

Принимая за l множество всех простых чисел, мы видим, что группа G восстанавливается по каноническому отображению своей локализации $G \otimes \mathbb{Q}$ и своего проконечного пополнения $\prod\limits_p \widehat{G}_p$ в группу

$$G \otimes \{\text{«конечные адели»}\}.$$

Полагая $l = \{p\}$, мы видим, что локализация группы G по отношению к p может быть восстановлена по аналогичным отображениям локализации в нуле и p-адического пополнения.

В следующих двух главах будут приведены аналогичные конструкции для пространств. Мы увидим, что изучение пространства X можно разбить на две части — изучение его проконечного пополнения $\widehat{X}$ и

рационального пространства X_0. Каждое из этих двух пространств отображается в адельное пространство X_A, причем пространство X восстанавливается по диаграмме

$$\begin{array}{ccc} & & \widehat{X} \\ & & \downarrow \\ X_0 & \to & X_A \end{array}$$

В этом главная идея первых трех глав.

Глава 2

ТЕОРЕТИКО-ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ

В этой главе мы построим функтор локализации в гомотопической теории, используя при этом клеточную конструкцию для односвязных пространств и конструкцию Постникова для «простых пространств». В конце главы будет приведено несколько поясняющих (как мы надеемся) примеров.

Мы будем работать в категории «простых пространств» и гомотопических классов отображений. Напомним, что «простое пространство» — это пространство, имеющее гомотопический тип CW-комплекса и такое, что его фундаментальная группа абелева и тривиально действует на группах гомотопий и гомологий его универсального накрывающего пространства.

Пусть l — некоторое (возможно, пустое) множество простых чисел. Мы зафиксируем l и под локализацией будем понимать локализацию относительно l.

Определение 2.1. Пространство X_l называется *локальным*, если его гомотопические группы $\pi_q X_l$ локальны, т. е. являются $\mathbb{Z}_l$-модулями. Отображение пространства X в локальное пространство X_l,

$$X \xrightarrow{l} X_l,$$

называется *локализацией*, если оно универсально относительно всех отображений пространства X в локальные пространства, т. е. если для любого такого отображения f существует единственное отображение f_l, делающее диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "f"'] & & X_l \arrow[dl, "f_l"] \\ & \left\{\begin{matrix}\text{локальное}\\ \text{пространство}\end{matrix}\right\} & \end{tikzcd}$$

коммутативной.

Локальные пространства и локализации характеризуются следующим утверждением:

Теорема 2.1. *Пусть*

$$X \xrightarrow{l} X'$$

— произвольное непрерывное отображение. Если пространства X, X' просты, то следующие утверждения эквивалентны:

(i) *отображение l является локализацией;*

(ii) *отображение l локализует группы целочисленных гомологий:*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{H}_*X \arrow[rr, "l"] \arrow[dr, "\otimes \mathbb{Z}_l"'] & & \widetilde{H}_*X' \arrow[dl, "\cong"] \\ & \widetilde{H}_*X \otimes \mathbb{Z}_l & \end{tikzcd}$$

(iii) *отображение l локализует группы гомотопий* ($* > 0$):

$$\begin{tikzcd} \pi_*X \arrow[rr, "l"] \arrow[dr, "\otimes \mathbb{Z}_l"'] & & \pi_*X' \arrow[dl, "\cong"] \\ & \pi_*X \otimes \mathbb{Z}_l & \end{tikzcd}$$

Полагая l равным тождественному отображению, мы получаем

Следствие. *Если пространство X просто, то следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *пространство X локально;*

(ii) *группы H_*X локальны;*

(iii) *группы π_*X локальны.*

Кроме того, из теоремы 2.1 сразу вытекает

Следствие. *Пусть $X \xrightarrow{l} X'$ — непрерывное отображение. Если пространства X, X' локальны и просты, то следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *l является гомотопической эквивалентностью;*

(ii) *l индуцирует изоморфизм локальных гомологий;*

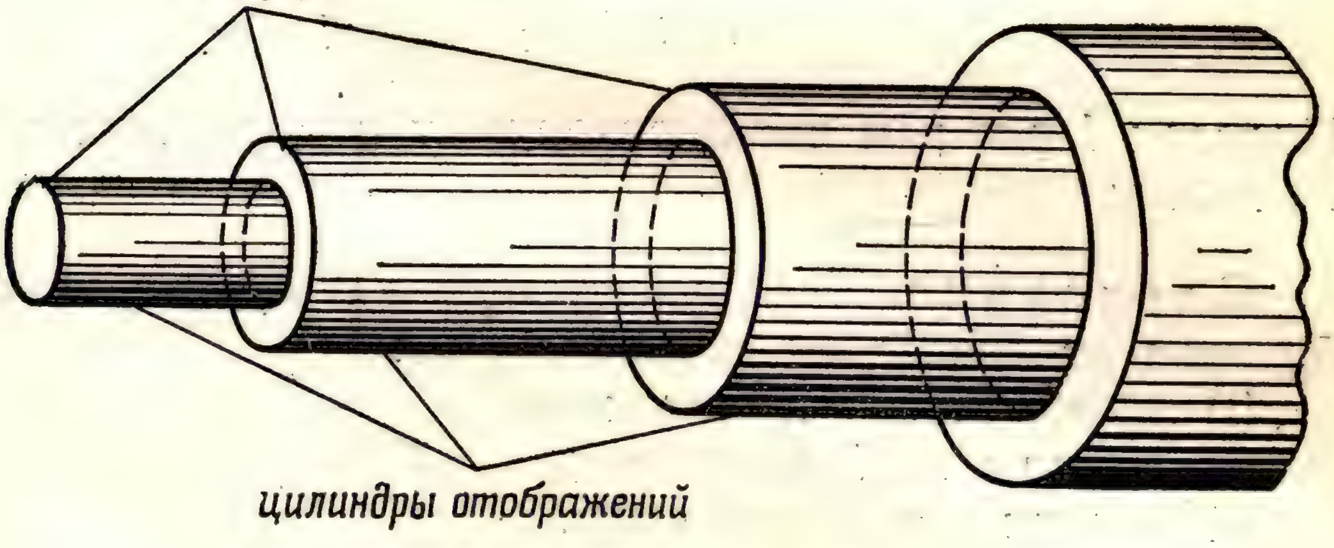
(iii) *l индуцирует изоморфизм локальных гомотопий.*

Заметим, что отображение индуцирует изоморфизм локальных гомологий тогда и только тогда, когда оно индуцирует изоморфизм рациональных гомологий и гомологий $\bmod p$ для всех $p \in l$.

Доказательство теоремы 2.1 небезынтересно, но длинно, и мы приведем его в конце главы. Теперь же мы опишем конструкцию локализации, которая использует эту теорему. Конструкция проводится по остовам и начинается с построения локализации сферы.

Выберем конфинальную последовательность $\{l'_1, l'_2, \ldots\}$ в мультипликативном множестве целых чисел, взаимно простых с l. Например, если $l = \{p_1, p_2, \ldots\}$ — множество простых чисел, дополнительное к l, то пусть $\{l'_1, l'_2, \ldots, l'_n, \ldots\} = \{p_1, p_1^2 p_2^2, \ldots, p_1^n \ldots p_n^n, \ldots\}$. Зафиксируем, далее, отображение $S^i \xrightarrow{l'_n} S^i$ степени l'_n и определим «локальную сферу» S^i_n как «бесконечный телескоп», построенный по последовательности отображений

$$S^i \xrightarrow{l'_1} S^i \xrightarrow{l'_2} S^i \to \ldots$$



Ясно, что включение $S^i \xrightarrow{l} S^i_l$ первой сферы в телескоп локализует гомологии, так как оно индуцирует следующее отображение групп $\widetilde{H}_j$:

$$0 \xrightarrow{l} 0 \quad \text{при} \quad j \neq i,$$

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{l} \lim_{l'} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}_l \quad \text{при} \quad j = i.$$

Из теоремы 2.1 следует, что отображение l локализует и группы гомотопий,

$$\begin{tikzcd} \pi_* S^i \arrow[r, "l"] \arrow[dr, "\otimes \mathbb{Z}_l"'] & \pi_* S^i_l \arrow[d, "\cong"] \\ & \pi_* S^i \otimes \mathbb{Z}_l, \end{tikzcd}$$

и что l является локализацией. Возникающая гомотопическая ситуация интересна, поскольку отображение в гомотопических группах сферы, индуцированное отображением степени d этой сферы на себя, описать нелегко. Например:

(i) отображение $S^2 \xrightarrow{d} S^2$ индуцирует в группе $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ умножение на d^2 (Х. Хопф);

(ii) отображение $S^4 \xrightarrow{2} S^4$ индуцирует эндоморфизм группы $\pi_8(S^4) = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$, задаваемый матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (Д. Франк).

С л е д с т в и е. *Эндоморфизм в d-кручении группы $\pi_j(S^i)$, задаваемый отображением степени d, нильпотентен.*

О п р е д е л е н и е 2.2. *Локальный CW-комплекс* строится индуктивно, начиная с точки или с локальной одномерной сферы, путем присоединения конусов над локальными сферами посредством отображений этих локальных сфер в «локальные остовы» меньшей размерности.

З а м е ч а н и е. Так как у нас нет локальных нульмерных сфер, то нет и локальных одномерных клеток.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть X есть CW-комплекс, у которого имеется только одна нульмерная клетка и вовсе нет одномерных клеток. Тогда существуют такой локальный CW-комплекс X_l и такое «клеточное» отображение*

$$X \xrightarrow{l} X_l,$$

что:

(i) *отображение l индуцирует изоморфизм между множеством клеток комплекса X и множеством локальных клеток комплекса X_l;*

(ii) *отображение l локализует гомологии.*

Следствие. *У любого односвязного пространства имеется локализация.*

Доказательство следствия. Выберем такое клеточное разбиение пространства X, в котором есть только одна нульмерная клетка и вовсе нет одномерных клеток [1]), и рассмотрим отображение

$$X \xrightarrow{l} X_l,$$

удовлетворяющее требованиям теоремы 2.2. Из теоремы 2.1 следует, что l локализует гомотопии и является локализацией.

Доказательство теоремы 2.2 будет проводиться индукцией по размерности. Если X — двумерный комплекс с одноточечным одномерным остовом $X^{(1)}$, то X есть букет двумерных сфер: $X = \bigvee S^2$. В этом случае отображение $\bigvee S^2 \to \bigvee S_l^2$ удовлетворяет требованиям теоремы 2.2 и является локализацией. Предположим теперь, что утверждение теоремы 2.2 справедливо для всех комплексов размерности $\leqslant n-1$. Пусть X — комплекс размерности n. Если отображение $f\colon A \to A_l$ удовлетворяет требованиям теоремы 2.2 и является локализацией, то такова и его надстройка $\Sigma f\colon \Sigma A \to \Sigma A_l$. Рассмотрим последовательность Пуппе

$$\begin{array}{ccccccccc}
\bigvee S^{n-1} & \xrightarrow{f} & X^{(n-1)} & \xrightarrow{c} & X & \xrightarrow{d} & \bigvee S^n & \xrightarrow{\Sigma f} & \Sigma X^{(n-1)} \to \ldots \\
\Big\downarrow{\scriptstyle l} & & \Big\downarrow{\scriptstyle l_{n-1}} & & & & & & \\
\bigvee S_{(l)}^{n-1} & \xrightarrow{f_l} & X_{(l)}^{(n-1)} & & & & & &
\end{array}$$

---

1) Для построения такого разбиения требуется, вообще говоря, заменить пространство X другим, гомотопически ему эквивалентным, пространством. — *Прим. ред.*

Так как, согласно теореме 2.1, $X_l^{(n-1)}$ является локальным пространством, то отображение f_l, делающее квадрат коммутативным, существует и единственно. Обозначим через $X_{(l)}$ кослой отображения f_l и определим отображение l: $X \to X_{(l)}$ как

$$l_{n-1} \cup c(i) \colon X^{n-1} \cup_f c(\vee S^{n-1}) \to X_{(l)}^{n-1} \cup_{f_l} c(\vee S_{(l)}^{n-1}).$$

Из предположения индукции следует, что отображение l индуцирует взаимно однозначное соответствие между множествами клеток и локальных клеток. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\vee S^{n-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & X^{(n-1)} \arrow[r, "c"] \arrow[d, "l_{n-1}"] & X \arrow[r, "d"] \arrow[d, "l"] & \vee S^n \arrow[r, "\Sigma f"] \arrow[d, "i"] & \Sigma X^{(n-1)} \arrow[d, "\Sigma l_{n-1}"] \\
\vee S_{(l)}^{n-1} \arrow[r, "f_l"] & X_{(l)}^{(n-1)} \arrow[r, "c_l"] & X_{(l)} \arrow[r] & \vee S_{(l)}^n \arrow[r, "\Sigma f"] & \Sigma X_{(l)}^{(n-1)}.
\end{tikzcd}$$

Так как у всех нижних пространств, кроме, быть может, пространства $X_{(l)}$, гомологии локальны, то, как это следует из точности, $X_{(l)}$ также имеет локальные гомологии.

Поскольку все вертикальные стрелки, за исключением, быть может, l, локализуют гомологии, то и l локализует гомологии. Тем самым теорема 2.2 доказана для конечных комплексов. Если X — бесконечный комплекс, то положим

$$X_l = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_l^{(n)}.$$

Ясно, что X_l удовлетворяет требованиям теоремы 2.2.

Существует конструкция, двойственная клеточной локализации; она использует башню Постникова.

Пусть X — башня Постникова:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \\
 & X^n \arrow[r] \arrow[d, "\text{слой } n\text{-го}"', "k\text{-инварианта}"] & K(\pi_{n+1},\ n+2) \\
X \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[ddr] & X^{n-1} \arrow[r, "n\text{-й } k\text{-инвариант}"'] \arrow[d] & K(\pi_n,\ n+1) \\
 & \vdots \arrow[d] & \\
 & X^0 = * &
\end{tikzcd}$$

Мы говорим, что X есть локальная башня Постникова, если комплекс X^n построен индуктивно, начиная с точки, при помощи расслоений с «локальными $K(\pi, n)$» (т. е. $K(\pi, n)$ с локальными π) в качестве слоя.

Теорема 2.3. *Если X — произвольная башня Постникова, то существуют локальная башня Постникова X_l и отображение*

$$X \to X_l,$$

которое локализует группы гомотопий и k-инварианты [1].

Доказательство. Проведем индукцию по числу этажей в башне X. Предположим, что мы построили отображение

$$X^{(n-1)} \xrightarrow{l} X_l^{(n-1)},$$

локализующее гомотопии. Тогда можно формально локализовать k-инвариант

$$k \in H^{n+1}\left(X^{(n-1)};\ \pi_n\right).$$

[1]) Замечание. При построении башни Постникова X_l и отображения $X \to X_l$ мы не будем пользоваться тривиальностью действия группы π_1 на группах гомологий универсального накрывающего пространства.

Мы получим элемент

$$\bar{k}_l \in H^{n+1}(X^{(n-1)};\ \pi_n \otimes \mathbb{Z}_l).$$

Как это следует из теоремы 2.1 и формулы универсальных коэффициентов, существует единственный элемент

$$k_l \in H^{n+1}(X_l^{(n-1)};\ \pi_n \otimes \mathbb{Z}_l)$$

с $l^* k_l = \bar{k}_l$. Согласованная пара k-инвариантов $(k,\ k_l)$ позволяет нам построить диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X^n \arrow[r, "l_n"] \arrow[d] & X_l^n \arrow[d] \\
X^{n-1} \arrow[r, "l_{n-1}"] \arrow[d, "k"'] & X_l^{n-1} \arrow[d, "k_l"] \\
K(\pi_n,\ n) \arrow[r, "\otimes \mathbb{Z}_l"] & K(\pi_n \otimes \mathbb{Z}_l,\ n),
\end{tikzcd}$$

в которой, согласно определению k-инварианта, X^n есть слой отображения k, X_l^n определяется как слой отображения k_l, а l_n строится из соображений естественности. Из точности гомотопической последовательности расслоения следует, что отображение l_n локализует гомотопии.

Действуя так и дальше, мы локализуем всю башню X.

Следствие. *Любое простое пространство обладает локализацией.*

Доказательство. Построим башню Постникова для нашего простого пространства. Локализуя эту башню согласно теореме 2.3, мы получим локализацию исходного пространства.

Заметим, что в силу свойства универсальности, любые две локализации канонически изоморфны. Поэтому мы можем говорить о функторе локализации.

Предложение 2.4. *В категории простых пространств функтор локализации сохраняет расслоения и корасслоения.*

Доказательство. Мы будем использовать гомологические и гомотопические свойства локализации. Пусть

$$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} B$$

есть расслоение с простыми F, E, B, и пусть

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \pi_*(F) \arrow[r] & \pi_*(E) \arrow[r] \arrow[dr] & \pi_*(B) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_{*-1}(F) \arrow[r] & \ldots \\
& & & \pi_*(E, F) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

есть соответствующая точная последовательность. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F_l \arrow[r, "i_l"] \arrow[d, "g_l"] & E_l \arrow[r, "f_l"] \arrow[d, equal] & B_l \arrow[d, equal] \\
\text{слой}(f_l) \arrow[r] & E_l \arrow[r] & B_l
\end{tikzcd}$$

(так как $f_l \circ i_l = 0$, то отображение g_l существует и единственно). Она индуцирует коммутативную лестницу

$$\begin{tikzcd}
(f_l)_* \arrow[r] & \pi_*(F_l) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_*(E_l) \arrow[r, "(f_l)_*"] \arrow[d, "\|"] & \pi_*(B_l) \arrow[r] \arrow[d, "\|"] & \pi_{*-1}(F_l) \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
(f_l)_* \arrow[r] & \pi_*(\text{слой}) \arrow[r] & \pi_*(E_l) \arrow[r, "(f_l)_*"] & \pi_*(B_l) \arrow[r] & \pi_{*-1}(\text{слой}) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Ее коммутативность следует из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\pi_*(B_l) \arrow[d, equal] & \pi_*(E_l, F_l) \arrow[l, "(f_l)_*"', "\cong"] \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\|"] & \pi_*(F_l) \arrow[d, "g_l"] \\
\pi_*(B_l) & \pi_*(E_l, \text{слой}) \arrow[l, "(f_l)_*"', "\cong"] \arrow[r, "\delta"] & \pi_*(\text{слой}).
\end{tikzcd}$$

В силу леммы о пяти гомоморфизмах, отображение g_l является гомотопической эквивалентностью. Следовательно, $F_l \xrightarrow{i_l} E_l \xrightarrow{f_l} B_l$ есть расслоение.

Пусть теперь $A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{i} X \cup_f CA$ — корасслоение с простыми A, X, $X \cup_f CA$. Тогда диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & X \arrow[r] \arrow[d, "b"] & X \cup_f CA \arrow[r] \arrow[d, "b \cup C(a)"] & \Sigma A \arrow[r, "\Sigma f"] \arrow[d, "\Sigma a"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma b"] \\
A_l \arrow[r, "f_l"] & X_l \arrow[r] & X_l \cup_{f_l} C(A_l) \arrow[r] & \Sigma A_l \arrow[r] & \Sigma X_l
\end{tikzcd}$$

гомотопически коммутативна, и потому отображение $X \cup_f C(A) \to X_l \cup_{f_l} C(A_l)$ индуцирует изоморфизм Z_l-гомологий. Для завершения доказательства предложения 2.4 остается проверить, что пространство $Y_l = X_l \cup_{f_l} C(A_l)$ просто: из следствия теоремы 2.1 тогда будет вытекать, что естественное отображение

$$X_l \cup_{f_l} C(A_l) \to (X \cup_f CA)_l$$

является гомотопической эквивалентностью. Судить о том, так ли это, когда Y_l не односвязно, мы предоставляем читателю.

Заметим теперь, что распространения функтора локализации на всю категорию гомотопических типов, которое сохраняло бы расслоения и корасслоения, не существует. Действительно, рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & S^2 \arrow[d, "\text{двулистное накрытие}"] \\
S^1 \arrow[r, "\text{двулистное}"', "\text{накрытие}"'] & S^1 \arrow[r] & \mathbb{R}P^2 \arrow[d, "\text{естественное вложение}"] \\
 & & \mathbb{R}P^\infty = K(\mathbb{Z}/2,\ 1)
\end{tikzcd}$$

Вертикаль в этой диаграмме является расслоением, а горизонталь — корасслоением. Если мы локализуем эту диаграмму «вне двойки» (т. е. по отношению к l, не содержащему 2), то получим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & S_l^2 \arrow[d] \\
S_l^1 \arrow[r, "\cong"'] & S_l^1 \arrow[r] & \mathbb{R}P_l^2 \arrow[d] \\
 & & \mathbb{R}P_l^\infty \cong *
\end{tikzcd}$$

Если бы локализация сохраняла корасслоения, то пространство $\mathbb{R}P_l^2$ было бы гомотопически эквивалентно точке. Если бы локализация сохраняла расслоения, то пространство $\mathbb{R}P_l^2$ было бы гомотопически эквивалентно локальной сфере S_l^2 (которая гомотопически не тривиальна).

Интересно понять, какую локализацию можно определить для более общих пространств, чем простые [1]).

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 2.1, приведем несколько примеров и сделаем несколько поясняющих замечаний.

(1) Для любого локального пространства X имеет место изоморфизм

$$[S_l^i, X]_b \cong \pi_i X,$$

где индекс b означает, что рассматриваются отображения, сохраняющие отмеченную точку. При $i > 1$ этот изоморфизм является групповым (так как $S_l^i = \Sigma S_l^{i-1}$, то левая часть обладает при $i > 1$ естественной структурой группы), а при $i = 1$ он позволяет ввести групповую структуру в левой части.

(2) Для локального пространства X имеет место гомотопическая эквивалентность $\Omega^i X \cong \operatorname{Map}_b(S_l^i, X)$, обобщающая изоморфизм (1).

(3) Отображение

$$(\Omega^i X)_l \to \Omega^i (X_l),$$

которое определяется, в силу свойства универсальности, отображением

$$\Omega^i X \xrightarrow{\Omega^i l} \Omega^i X_l,$$

доставляет гомотопическую эквивалентность между компонентами связности, содержащими тождественное

[1]) См., например, эквивариантную локализацию, используемую при доказательстве теоремы 4.2 [2]).

[2]) См. также недавнюю работу M. Bendersky, A functor which localized non-simply connected spaces, Lecture Notes, 418 (1974), 13—21. — *Прим. ред.*

отображение. (Заметим, что $\pi_0(\Omega^i S^i)=\mathbb{Z}$, а $\pi_0(\Omega^i(S^i_l))=\mathbb{Z}_l$.) В частности,

$$(\mathrm{Map}_b(S^i, S^i)_{+1})_l \cong \mathrm{Map}_b(S^i_l, S^i_l)_{+1}.$$

(4) Если l, l' — два непересекающихся множества простых чисел и $l \cup l' = \{$все простые числа$\}$, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \to & X_l \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{l'} & \to & X_0 \end{array}$$

является расслоенным квадратом. (С помощью предложения 1.11 легко проверить, что последовательность

$$0 \to \pi_i X \to \pi_i X \otimes \mathbb{Z}_l \to \pi_i X \otimes \mathbb{Z}_{l'} \to \pi_i X \otimes \mathbb{Q} \to 0$$

точна.)

(5) *Обобщение*: пространство X является бесконечным расслоенным произведением своих локализаций в отдельных простых числах

$$\begin{array}{ccccccc} & X_p & & X_q & & X_r & \\ \ldots & & \searrow & \downarrow & \swarrow & & \ldots \\ & & & X_0 & & & \end{array}$$

над пространством X_0:

$$X_{2,3} \cong X_2 \times_{X_0} X_3,$$
$$X_{2,3,5} \cong X_{2,3} \times_{X_0} X_5,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$X \cong \ldots((X_2 \times_{X_0} X_3) \times_{X_0} X_5) \times_{X_0} X_7 \ldots$$

(см. предложение 1.12).

(6) Пространство X_0 является H-пространством в том и только том случае, если оно является произведением пространств Эйленберга — Маклейна (см. Milnor J., Moore J., On the structure of Hopf algebra, *Ann. of Math.*, **81** (1965), 211—264).

(7) Пространство X является H-пространством в том и только том случае, если для каждого простого p пространство X_p является H-пространством и канонический изоморфизм $H_*(X_p; \mathbb{Q}) \to H_*(X_q; \mathbb{Q})$

является кольцевым для произвольной пары простых чисел p, q.

Доказательство. Пусть X есть H-пространство с умножением μ: $X \times X \to X$. Отображение μ индуцирует отображение μ_p: $(X \times X)_p \to X_p$ и, следовательно, отображение μ_p: $X_p \times X_p \to X_p$. Поэтому каждое X_p наследует от X H-структуру. Пространство $(X_p)_0$ совпадает с X_0, и ясно, что H-структуры на X_0, индуцированные H-структурами X и X_p, совпадают. Поэтому естественные изоморфизмы

$$\begin{array}{l} H_*((X_p)_0;\ \mathbb{Q}) \cong H_*(X_0;\ \mathbb{Q}) \\ \wr\| \\ H_*(X_p;\ \mathbb{Q}) \end{array}$$

являются кольцевыми.

Обратно, если для всех простых p пространство X_p снабжено H-структурой и естественный изоморфизм $H_*(X_p;\ \mathbb{Q}) \cong H_*(X_q;\ \mathbb{Q})$ является кольцевым, то H-пространства $(X_p)_0$ и $(X_q)_0$ изоморфны (так как в случае рационального H-пространства его H-структура определяется кольцом Понтрягина). Поэтому в пространствах диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X_2 & X_3 & X_5 \ \ldots \\ \searrow & \downarrow & \swarrow \\ & X_0 & \end{array}$$

имеются согласованные умножения. Они индуцируют структуру H-пространства на расслоенном произведении X.

Замечание. Если $H_q(X;\ \mathbb{Q}) = 0$ при $q \geqslant n$ для некоторого n, то, согласно теореме Хопфа, кольца $H_*(X_p;\ \mathbb{Q})$ являются внешними алгебрами и потому определяются своими групповыми структурами. Следовательно, канонический изоморфизм $H_*(X_p;\ \mathbb{Q}) \cong$ $\cong H_*(X_q;\ \mathbb{Q})$ автоматически является кольцевым.

(8) Если H — гомотопически коммутативное H-пространство, то функтор $F = [\quad, H] \otimes \mathbb{Z}_l$ представляется пространством H_l.

(9) Если H-пространство X обладает классифицирующим пространством BX, то $(BX)_l$ является классифицирующим пространством для H-пространства X_l.

(10) Имеет место изоморфизм $(BU_n)_0 \cong \prod_{i=1}^{n} K(\mathbb{Q}, 2i)$, задаваемый рациональными классами Чжэня

$$c_i \in H^{2i}(BU_n; \mathbb{Q}), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Для доказательства достаточно вспомнить, что

$$H^*(BU_n; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[c_1, \ldots, c_n],$$
$$H^*(K(\mathbb{Q}, 2i); \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x_{2i}].$$

(11) Так как

$$H^*(BSO_{2n}; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[p_1, \ldots, p_n; \chi]/(\chi^2 = p_n),$$

то отображение

$$BSO_{2n} \xrightarrow{p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}; \chi} \left(\prod_{i=1}^{n-1} K(\mathbb{Q}, 4i)\right) \times K(\mathbb{Q}, 2n)$$

задает локализацию в нуле пространства BSO_{2n}.

(12) $H^*(BSO_{2n-1}; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[p_1, \ldots, p_{n-1}]$; в действительности $\mathbb{Q}$ можно заменить на $\mathbb{Z}[1/2]$. Поэтому:

(a) $$(BSO_{2n-1})_0 \cong \prod_{i=1}^{n-1} K(\mathbb{Q}, 2i);$$

(b) если мы локализуем относительно *нечетных простых чисел*, то естественная проекция

$$BSO_{2n-1} \to BSO$$

будет обладать каноническим сечением над $(4n-1)$-м остовом.

(13) Пространство Тома MU_n является кослоем корасслоения

$$BU_{n-1} \to BU_n \to MU_n.$$

Поэтому $(MU_n)_0$ является кослоем корасслоения

$$\prod_{i=1}^{n-1} K(\mathbb{Q}, 2i) \to \prod_{i=1}^{n} K(\mathbb{Q}, 2i) \to (MU_n)_0,$$

т. е. пространство $(MU_n)_0$ канонически ретрагируется на $K(\mathbb{Q}, 2n)$.

Геометрическое следствие. *Каждая прямая в пространстве*

$$H^{2i}(\text{конечный полиэдр}; \mathbb{Q})$$

содержит точку, которая «естественно» представляется как класс Тома подкомплекса V нашего полиэдра с комплексным нормальным расслоением.

(14) Пространство $(BU)_0$ естественно представляется как индуктивный предел по всем n, k отображений

$$BU_n \xrightarrow{\otimes k} BU_{kn}.$$

(15) Рассмотрим S^n с $n > 0$.

(a) Пространство S_0^n является H-пространством в том и только в том случае, когда n нечетно. При этом S_0^{2n-1} есть пространство петель пространства $K(\mathbb{Q}, 2n)$.

(b) Пространство S_2^{2n-1} является H-пространством только при $n = 1, 2, 4$ и является пространством петель только при $n = 1, 2$ (Дж. Ф. Адамс).

(c) Если p нечетно, то пространство S_p^{2n-1} при всех n является H-пространством. Оно является пространством петель в том и только в том случае, когда $p \equiv 1 \pmod n$. (Необходимость этого условия доказали Х. Адем, Н. Стинрод, Дж. Ф. Адамс и А. Люлевичус, а достаточность будет проверена в гл. 4 при изучении «главных сферических расслоений».)

Таким образом, всякая сфера S^{2n-1} становится пространством петель в результате локализации по любому из бесконечного множества простых чисел p. Например, S_p^7 есть пространство петель для всех простых p вида $4k+1$. Однако для фиксированного p локальные сферы S_p^{2n-1} являются пространствами петель лишь при конечном множестве значений n: если $p > 2$, то для n, делящих $p-1$ (или, в общем случае, для n, являющихся порядками конечных подгрупп в группе единиц кольца целых p-адических чисел).

(16) (a) Если мы локализуем вне двойки, то отображение Кирби — Зибенмана

$$PL = \left\{\begin{matrix}\text{кусочно линейные}\\ \text{гомеоморфизмы}\\ \text{пространства } \mathbb{R}^n\end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix}\text{гомеоморфизмы}\\ \text{пространства } \mathbb{R}^n\end{matrix}\right\} = \mathrm{Top}$$

становится эквивалентностью при $n \to \infty$.

(b) Обозначим через G предел при $n \to \infty$ группы собственных гомотопических эквивалентностей пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда при локализации вне двойки получается гомотопическая эквивалентность

$$G/PL \cong G/\mathrm{Top} \cong BO \quad (\text{см. гл. 6, стр. 278}),$$

а при локализации в двойке — следующие разложения:

$G/\mathrm{Top} \cong$ (произведение пространств Эйленберга — Маклейна)

$$\left[\prod_{i=1}^{\infty} K(\mathbb{Z}/2,\ 4i+2)\right] \times \left[\prod_{i=1}^{\infty} K(\mathbb{Z},\ 4i)\right];$$

$G/PL \cong$ (почти произведение пространств Эйленберга — Маклейна)

$$[K(\mathbb{Z}/2,\ 2) \underset{\delta Sq^2}{\times} K(\mathbb{Z},\ 4)] \times \\ \times \left[\prod_{i=1}^{\infty} K(\mathbb{Z}/2,\ 4i+2)\right] \times \left[\prod_{i=1}^{\infty} K(\mathbb{Z},\ 4i)\right]$$

(c) При локализации вне двойки имеют место равенства

$$\widetilde{K}_{PL} \cong \widetilde{K}_{\mathrm{Top}} \cong KO^* \oplus \{\text{конечная теория}\} \quad (\text{гл. 6, § 4}),$$

где через KO^* обозначена группа специальных единиц в K-теории ($KO^* = 1 + \widetilde{K}O$), и естественное отображение

$$\widetilde{K}O \to \widetilde{K}_{PL} \cong \widetilde{K}_{\mathrm{Top}}$$

задается некоторым экспоненциальным оператором θ в K-теории:

$$\widetilde{K}O \xrightarrow{\theta \oplus \text{нуль}} KO^* \oplus \{\text{конечная теория}\} \quad (\text{гл. 6}).$$

Мы детализируем последнее замечание во второй части этой работы.

Доказательство теоремы 2.1. Прежде всего мы докажем эквивалентность условий (ii) и (iii). Начнем с трех общих замечаний.

Замечание (a). При изучении отображения

$$X \xrightarrow{l} X'$$

мы будем использовать его постниковские разложения:

I
верхняя постниковская система

$$\begin{tikzcd}
X^n \arrow[r, "l_n"] \arrow[d] & (X')^n \arrow[d] \\
X^{n-1} \arrow[r, "l_{n-1}"] \arrow[d] & (X')^{n-1} \arrow[d, "\text{n-й k-инвариант пространства X'}"] \\
K(\pi_n, n+1) \arrow[r, "k^n(l)"] & K(\pi'_n, n+1)
\end{tikzcd}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

где $X^0 = X^0_l = *$, вертикальные стрелки являются расслоениями и

$$\{X \xrightarrow{l} X'\} = \varprojlim \{X^n \xrightarrow{l_n} (X')^n\}.$$

(Так как в постниковской башне имеет место стабилизация остовов, то мы можем без всякого риска использовать проективный предел. В гл. 3 мы будем изучать проективный предел в более сложной ситуации и приведем пример возникающих при этом ловушек.)

II
нижняя постниковския система

$$\begin{tikzcd}
X_{n+1} \arrow[r, "l^{n+1}"] \arrow[d] & X'_{n+1} \arrow[d] \\
X_n \arrow[r, "l^n"] \arrow[d] & X'_n \arrow[d, "\text{первый k-инвариант пространства X'_n}"] \\
K(\pi_n, n) \arrow[r, "k_n(l)"] & K(\pi'_n, n)
\end{tikzcd}$$

где $(X_1 \xrightarrow{l_1} X_1') = (X \xrightarrow{l} X')$, вертикальные стрелки являются расслоениями и $X_n \xrightarrow{l_n} X_n'$ есть $(n-1)$-связное накрытие отображения $X \xrightarrow{l} X'$ [1]).

Замечание (b). При изучении отображений

$$K(\pi_n, n+1) \underset{k_{n+1}(l)}{\overset{k_n(l)}{\rightrightarrows}} K(\pi_n', n+1),$$

индуцированных гомоморфизмами k: $\pi \to \pi'$, мы будем использовать диаграмму

(III)
$$\begin{array}{ccc} K(\pi, n) & \xrightarrow{k_n} & K(\pi', n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \longrightarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(\pi, n+1) & \xrightarrow{k_{n+1}} & K(\pi', n+1) \end{array}$$

где P — стягиваемое пространство путей и вертикальные стрелки являются расслоениями.

Замечание (c). Имеет место следующее обобщение предложений 1.7 и 1.8. Пусть

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f} & F' \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{g} & E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{h} & B' \end{array}$$

— отображение расслоения в расслоение. Тогда

(i) если все пространства связны и имеют коммутативные фундаментальные группы, а два горизонтальных отображения локализуют гомотопии, то и третье горизонтальное отображение локализует гомотопии;

(ii) если фундаментальные группы действуют тривиально на группах гомологий слоев и два

[1]) То есть X_n, X_n' — «убивающие пространства». — *Прим. ред.*

горизонтальных отображения локализуют гомологии, то и третье горизонтальное отображение локализует гомологии.

Утверждение (i) сразу следует из точности гомотопической последовательности расслоения (ср. с доказательством предложения 1.7).

Доказательство утверждения (ii) состоит из двух частей. Во-первых, из предложения 1.8 вытекает, что если из трех наборов групп гомологий

$$\widetilde{H}_* F', \quad \widetilde{H}_* E', \quad \widetilde{H}_* B'$$

два состоят из локальных групп, то и третий состоит из локальных групп. Во-вторых, если мы уже знаем, что гомологии всех правых пространств локальны, то для доказательства утверждения (ii) достаточно проверить, что отображения f, g, h индуцируют изоморфизм групп

$$\widetilde{H}_*(\quad; \mathbb{Z}_l),$$

так как, например,

$$\widetilde{H}_*(F') \cong \widetilde{H}_* F' \otimes \mathbb{Z}_l \cong \widetilde{H}_*(F'; \mathbb{Z}_l).$$

Но последнее ясно, поскольку если два отображения индуцируют изоморфизм групп $\widetilde{H}^*(\quad; \mathbb{Z}_l)$, то третье отображение тоже индуцирует изоморфизм этих групп в силу теоремы о сравнении спектральных последовательностей.

Используя сделанные замечания, нетрудно теперь показать, что отображение l простого пространства X в простое пространство X' локализует гомотопии в том и только в том случае, когда оно локализует гомологии.

Шаг 1. Пусть

$$(X \xrightarrow{l} X') = (K(\pi, 1) \xrightarrow{l} K(\pi', 1)).$$

Если l локализует гомологии, то оно локализует и гомотопии, так как $\pi = H_1(X)$ и $\pi' = H_1(X')$. Если l локализует гомотопии, то

$$(\pi \to \pi') = (\pi \to \pi_l)$$

Следовательно, l локализует гомологии, так как: (i) при $\pi = \mathbb{Z}$ отображение l есть локализация

$$S^1 \to S_l^1,$$

изучавшаяся ранее; (ii) при $\pi = \mathbb{Z}/p^n$

$$\pi_l = \begin{cases} 0, & \text{если } p \notin l, \\ \mathbb{Z}/p^n, & \text{если } p \in l; \end{cases}$$

(iii) наконец, произвольная абелева группа является индуктивным пределом прямых сумм групп, рассмотренных в (i) и (ii).

Шаг 2. Пусть

$$(X \xrightarrow{l} X') = (K(\pi, n) \xrightarrow{l} K(\pi', n)).$$

Если l локализует гомологии, то l локализует и гомотопии, так как $\pi = H_n(X)$, $\pi' = H_n(X')$.

Если l локализует гомотопии, то, используя индукцию по n, диаграмму III в замечании (b), замечание (c) и утверждение, доказанное на первом шаге, мы видим, что l локализует и гомологии.

Шаг 3 (общий случай). Пусть отображение l локализует гомологии. Применяя теорему Гуревича при $n = 1$, мы находим, что отображение l локализует π_1. Используя утверждение, доказанное на первом шаге, диаграмму II в замечании (a) с $n = 1$ и замечание (c), мы находим, что отображение

$$X_2 \xrightarrow{l_2} X_2'$$

локализует гомологии. Применяя теорему Гуревича при $n = 2$, мы видим, что отображение l_2, а значит и отображение l, локализует π_2. Используя утверждение, доказанное на втором шаге, с $n = 2$, диаграмму II с $n = 2$ и замечание (c), мы приходим к выводу, что отображение l локализует π_3 и т. д. По индукции получаем, что отображение l локализует гомотопии во всех размерностях.

Пусть теперь отображение l локализует гомотопии.

Применяя утверждение, доказанное на втором шаге, и используя диаграмму I, мы проверяем по индукции, что каждое из отображений

$$X^n \xrightarrow{l_n} (X')^n$$

локализует гомологии. Поэтому отображение

$$l = \varprojlim l_n$$

также локализует гомологии.

Эквивалентность утверждений (ii) и (iii) теоремы 2.1 доказана.

Покажем теперь, что утверждения (i) и (ii) нашей теоремы эквивалентны.

Пусть $l\colon X \to X'$ — универсальное отображение для отображений в локальные пространства Y. Беря в качестве Y различные пространства $K(\pi, n)$ с локальными π, находим, что l индуцирует изоморфизм групп $H^*(\ ;\mathbb{Q})$ и $H^*(\ ;\mathbb{Z}/p)$ при $p \in l$. Следовательно, отображение l индуцирует изоморфизмы групп

$$H_*(\ ;\mathbb{Q}) \text{ и } H_*(\ ;\mathbb{Z}/p),\ p \in l.$$

Используя точную последовательность Бокштейна

$$\ldots \to H_i(\ ;\mathbb{Z}/p^n) \to H_i(\ ;\mathbb{Z}/p^{n+1}) \to H_i(\ ;\mathbb{Z}/p^n) \to \ldots,$$

мы по индукции докажем, что l индуцирует изоморфизм групп $H_*(\ ;\mathbb{Z}/p^n)$ для всех n. Так как операция взятия гомологий при всех n коммутирует с индуктивным пределом, то l индуцирует изоморфизм групп $H_*(\ ;\mathbb{Z}/p^\infty)$, где $\mathbb{Z}/p^\infty = \lim \mathbb{Z}/p^n$. Используя, наконец, точную последовательность коэффициентов

$$0 \to \mathbb{Z}_l \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_l \to 0$$

и изоморфизм

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_l = \bigoplus_{p \in l} \mathbb{Z}/p^\infty,$$

мы находим, что отображение l индуцирует изоморфизм групп $H_*(\ ;\mathbb{Z}_l)$.

По определению, X' есть локальное пространство. Следовательно, как мы уже доказали, его группы гомологий локальны. Таким образом, (ii) следует из (i).

Для того чтобы доказать, что (i) следует из (ii), рассмотрим препятствие к единственности продолжения f_l отображения f в диаграмме

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "l"] \arrow[dr, "f"'] & X' \arrow[d, dashed, "f_l"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Оно лежит в группе

$$H^*(X', X; \pi_*Y).$$

Заметим, что группы π_*Y являются $\mathbb{Z}_l$-модулями и что отображение l индуцирует изоморфизм $\mathbb{Z}_l$-гомологий. Используя естественную точную последовательность (над кольцом $\mathbb{Z}_l$)

$$0 \to \operatorname{Ext}(H_i(\ ;\mathbb{Z}_l), \mathbb{Z}_l) \to H^{i+1}(\ ;\mathbb{Z}_l) \to$$
$$\to \operatorname{Hom}(H_{i+1}(\ ;\mathbb{Z}_l), \mathbb{Z}_l) \to 0,$$

мы получаем, что отображение l индуцирует изоморфизм $\mathbb{Z}_l$-когомологий. Из формулы универсальных коэффициентов над $\mathbb{Z}_l$ следует, что группа, в которой принимает значение препятствие, тривиальна. Следовательно, существует единственное продолжение f_l отображения f, и, значит, отображение l является локализацией.

Глава 3

ПОПОЛНЕНИЕ В ГОМОТОПИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

В этой главе мы распространим конструкцию пополнений групп в гомотопическую теорию.

Мы следуем идеям Артина и Мазура[1]), которые понимали проконечное пополнение гомотопического типа как проективную систему гомотопических типов с конечными гомотопическими группами. Мы «завершим» рассмотрения Артина — Мазура, построив для каждого связного CW-комплекса X настоящий гомотопический тип $\hat{X}$.

Это проконечное пополнение $\hat{X}$ будет наделено дополнительной структурой: естественной компактной топологией на функторе $[\ ,\hat{X}]$. Последняя позволит нам рассмотреть проективный предел в гомотопической категории, что обычно бывает невозможно.

Предположения типа конечности, налагаемые на X (или $\hat{X}$), делают эту топологию внутренней по отношению к $\hat{X}$. Благодаря этому мы будем иметь возможность уничтожать или восстанавливать ее, как того потребует ситуация.

Для счетных комплексов X мы построим также формальное пополнение $\bar{X}$. Последнее является CW-комплексом с частичной топологией на функторе $[\ ,\bar{X}]$. Мы будем применять формальное пополнение к рациональным гомотопическим типам, поскольку, как оказывается, проконечное пополнение рационального пространства всегда стягиваемо. В этом случае существенной частью топологической структуры на функторе $[\ ,\bar{X}]$ является структура $\hat{\mathbb{Z}}$-модуля на гомотопических группах пространства $\bar{X}$. Эта $\hat{\mathbb{Z}}$-струк-

---

[1]) Artin M., Mazur B., Etale homotopy theory, Springer Lecture Notes, 100 (1969).

тура делает более обозримыми указанные гомотопические группы, которые чрезвычайно велики как векторные $\mathbb{Q}$-пространства.

Эти конструкции пополнения и конструкция локализации из гл. 2 позволяют нам «разложить» классический гомотопический тип на рациональную часть и бесконечное множество p-адических частей.

Мы обсудим возможность восстановления классического гомотопического типа по этим частям с помощью адельного типа и гомотопического аналога «арифметического квадрата» из гл. 1.

§ 1. ПОСТРОЕНИЕ ПРОКОНЕЧНОГО ПОПОЛНЕНИЯ $\hat{X}$

Идея конструкции. Мы начинаем со следующего замечания. Если F — пространство с конечными гомотопическими группами, то на функторе $[\ \ , F]$ можно ввести естественную топологию. Эта (компактная) топология получается из эквивалентности

$$[Y, F] \xrightarrow{\cong} \varprojlim_{\substack{\text{конечные} \\ \text{подкомплексы} \\ Y_a \subseteq Y}} [Y_a, F]$$

и удовлетворяет аксиоме Хаусдорфа.

Для любого пространства X рассмотрим категорию $\{f\}$ отображений пространства X в пространства F с конечными гомотопическими группами. Эта категория окажется пригодной для образования проективных пределов, и мы сможем определить функтор $\hat{X}$ равенством

$$\hat{X}(Y) = \varprojlim_{\{f\}} [Y, F]$$

($\{f\}$ зависит от X). Компактность правой части обеспечивает, в силу теоремы Брауна, представимость функтора $\hat{X}$. Таким образом, мы определим гомотопический тип проконечного пополнения $\hat{X}$ и топологию на функторе $[\ \ , \hat{X}]$.

Замечание. Существенность условия компактности для образования проективного предела

иллюстрируется следующим примером. Обозначим через L проективный предел представимых функторов $[\ \ , S^2]$ относительно системы отображений в себя, порожденных отображением

$$S^2 \xrightarrow{\text{степень } 3} S^2.$$

Нетрудно проверить, что $L(S^1) \cong L(S^2) \cong *$, но $L(\mathbb{R}P^2)$ состоит из двух элементов. Следовательно, функтор L не представим[1]).

Дадим, хотя, может быть, и преждевременно, следующее определение:

Определение 3.1. *Проконечное пополнение* $\hat{X}$ связного CW-комплекса X состоит из

(i) контравариантного функтора

$$\hat{X}\colon \left\{\begin{matrix}\text{гомотопическая}\\ \text{категория}\end{matrix}\right\} \xrightarrow[\{f\}]{\underleftarrow{\lim}\,[\ \ , F]} \left\{\begin{matrix}\text{категория компактных}\\ \text{хаусдорфовых вполне несвязных}\\ \text{пространств}\end{matrix}\right\};$$

(ii) CW-комплекса (также обозначаемого через $\hat{X}$), представляющего сквозной функтор

$$\left\{\begin{matrix}\text{гомотопическая}\\ \text{категория}\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\hat{X}} \left\{\begin{matrix}\text{топологическая}\\ \text{категория}\end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{функтор}]{\text{естественный}} \left\{\begin{matrix}\text{категория}\\ \text{множеств}\end{matrix}\right\};$$

(iii) естественного гомотопического класса отображений (называемого проконечным пополнением)

$$X \xrightarrow{c} \hat{X},$$

[1]) Если бы он был представим, то естественная последовательность

$$L(S^2) \to L(\mathbb{R}P^2) \to L(S^1)$$

была бы точна. — *Прим. ред.*

определяемого отображением

$$\prod_{\{f\}} (X \xrightarrow{f} F).$$

Ниже это определение обсуждается и мотивируется.

Предложение 3.1. *Если гомотопические группы пространства F конечны, то функтор $[\ \ , F]$ естественно представляется как функтор в топологическую категорию вполне несвязных компактных хаусдорфовых пространств. При этом гомотопические классы отображений $F \to F'$ индуцируют непрерывные отображения функтора $[\ \ , F]$ в функтор $[\ \ , F']$.*

Доказательство основывается на двух утверждениях:

(i) для любого конечного комплекса Y_α множество $[Y_\alpha, F]$ конечно;

(ii) для любого комплекса Y естественное отображение

$$[Y, F] \xrightarrow{\text{сужение}} \varprojlim_{\substack{\text{конечные} \\ \text{подкомплексы} \\ Y_\alpha \subseteq Y}} [Y_\alpha, F]$$

взаимно однозначно.

Утверждения (i) и (ii) мы докажем несколько позже. Вместе они показывают, что множество $[Y, F]$ естественно изоморфно проективному пределу конечных дискретных топологических пространств. Но из общей топологии известно, что такие «проконечные пространства» характеризуются тем, что они являются компактными хаусдорфовыми и вполне несвязными.

Гомотопический класс отображений $f\colon Y' \to Y$ индуцирует непрерывное отображение $[Y, F] \to [Y', F]$. Подходящее клеточное отображение класса f индуцирует отображение направленных множеств

$$\{Y'_\beta\} \to \{fY'_\beta\} \subseteq \{Y_\alpha\}$$

и, следовательно, определяет отображение (в противоположную сторону) обратных систем.

Аналогично, отображение $f\colon F \to F'$ индуцирует естественное непрерывное отображение соответствующих функторов:

$$[Y, F] \xrightarrow{\varprojlim_{\alpha} ([Y_\alpha, F] \xrightarrow{f_*} [Y_\alpha, F'])} [Y, F'].$$

Предложение доказано.

Таким образом, полная подкатегория гомотопической категории, состоящая из гомотопических типов пространств с конечными гомотопическими группами, канонически изоморфна категории функторов из гомотопической категории в категорию компактных хаусдорфовых пространств:

$$F \longleftrightarrow [\quad, F].$$

Каждому пространству X отвечает подкатегория этой категории «компактно представимых функторов». Точнее, свяжем с пространством X категорию $\{f\}$, у которой (i) объектами служат (базированные) гомотопические классы отображений $X \xrightarrow{f} F$, где F — пространство с конечными гомотопическими группами; (ii) морфизм объекта $X \xrightarrow{f} F$ в объект $X \xrightarrow{f'} F'$ есть гомотопически коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & F \arrow[d] \\ & F' \end{tikzcd}$$

Предложение 3.2. *Категория $\{f\}$ обладает следующими свойствами:* (a) $\{f\}$ — *направленная категория, т. е. любые два объекта f, g можно включить в диаграмму*

$$\begin{tikzcd} f \arrow[dr] & \\ & h; \\ g \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(b) *в категории* $\{f\}$ *нет существенно различных морфизмов, т. е. любая диаграмма* $f \rightrightarrows g$ *может быть включена в диаграмму*

$$f \rightrightarrows g \rightarrow h,$$

в которой композиции совпадают.

Доказательство. (a) Для любых объектов $X \xrightarrow{f} F$ и $X \xrightarrow{g} F'$ категории $\{f\}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} & F \times F' \arrow[dr, "p_2"] \arrow[dd, "p_1"] & \\ X \arrow[ur, "f \times g"] \arrow[rr, "g"'] \arrow[dr, "f"'] & & F' \\ & F & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

(b) Пусть заданы два морфизма в категории $\{f\}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & F' \arrow[d, shift right, "h"'] \arrow[d, shift left, "h'"] \\ & F \end{tikzcd}$$

Рассмотрим «коуравнитель» отображений h и h':

$$C(h, h') \rightarrow F' \underset{h'}{\overset{h}{\rightrightarrows}} F, \qquad h \circ g \sim h \circ g'.$$

Если h' есть отображение в точку, то $C(h, h')$ — гомотопический слой отображения h. В общем случае отображение $C(h, h') \rightarrow F'$ может быть описано как (гомотопически) универсальное для отображений $g\colon \square \rightarrow X'$ с фиксированной гомотопией между $h \circ g$ и $h' \circ g$ (существование и гомотопическая единственность очевидным образом следуют из теории Брауна) [1]).

Более явно пространство $C(h, h')$ можно описать как некоторое подмножество в произведении ((пути в F) $\times F'$), а именно

$$C(h, h') = \{p \in F^I,\ x \in F' \mid p(0) = h(x),\ p(1) = h'(x)\}.$$

---

[1]) См. Brown E. H., Abstract homotory theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **119** (1965), 79—85, или Спеньер Е., Алгебраическая топология, «Мир», М., 1971, гл. VII, § 7. — *Прим. ред.*

Так же как и в случае, когда h' есть отображение в точку, можно построить точную последовательность гомотопических групп

$$\ldots \to \pi_i C(h, h') \to \pi_i F' \xrightarrow{h_* - h'_*} \pi_i F \to \ldots .$$

Из функториальности определения пространства $C(h, h')$ следует существование коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} & F'' = C(h, h') \arrow[d] \\ X \arrow[ur, "f''"] \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & F' \arrow[d, shift right, "h"'] \arrow[d, shift left, "h'"] \\ & F \end{tikzcd}$$

(f'' определяется с помощью гомотопии, соединяющей $h \circ f$ с $h' \circ f$). В силу точности гомотопической последовательности, гомотопические группы пространства F'' конечны, т. е. отображение $X \to F''$ есть объект категории $\{f\}$.

Мы пришли к следующей ситуации.

(i) Для каждого пространства X определена категория $\{X \to F\} = \{f\}$, и в силу предложения 3.2 эта категория является хорошо индексирующей, т. е. пригодной для образования проективных пределов. (Мы можем считать, что объекты категории $\{f\}$ составляют множество; чтобы этого достичь, достаточно выбрать в каждом гомотопическом типе с конечными гомотопическими группами по одному представителю.)

(ii) Имеется функтор из категории индексов $\{f\}$ в категорию «компактных представимых функторов»

$$f \mapsto [\quad, F].$$

Поэтому теперь естественно доказать

Предложение 3.3. *Пусть $\{F_\alpha\}$ — семейство компактных представимых функторов, занумерованных хорошо индексирующей категорией $\{\alpha\}$. Тогда можно образовать проективный предел $\varprojlim_{\alpha} F_\alpha$, и этот предел является компактным представимым функтором.*

Доказательство. Полезно определить новую систему функторов I_α на гомотопической категории, взяв за $I_\alpha(Y)$ пересечения образов отображений $F_\beta(Y) \to F_\alpha(Y)$ по всем морфизмам $\alpha \to \beta$. Используя направленность категории $\{\alpha\}$ и отсутствие в ней существенно различных морфизмов, можно показать, что все морфизмы $\alpha \to \beta$ индуцируют один и тот же морфизм

$$I_\beta(Y) \xrightarrow{\beta\alpha} I_\alpha(Y).$$

[Например, уравняем пару отображений $\alpha \rightrightarrows \beta$ коммутативной диаграммой $\alpha \rightrightarrows \beta \to \gamma$. Тогда диаграмма

$$F_\gamma(Y) \to F_\beta(Y) \rightrightarrows F_\alpha(Y)$$

коуравнивает пару

$$F_\beta(Y) \rightrightarrows F_\alpha(Y).$$

Но, по определению, $I_\beta(Y)$ содержится в образе $F_\gamma(Y)$, и потому эти отображения $F_\beta(Y) \rightrightarrows F_\alpha(Y)$ совпадают на $I_\beta(Y)$.

Для того чтобы доказать, что образ этого единственного отображения

$$I_\beta(Y) \to F_\alpha(Y)$$

лежит в $I_\alpha(Y)$, мы используем сильную направленность категории $\{\alpha\}$. А именно, если

$$F_\gamma(Y) \to F_\alpha(Y)$$

есть отображение, индуцированное произвольным отображением $\alpha \to \gamma$, то мы можем доминировать отображения $\alpha \to \gamma$, $\alpha \to \beta$ отображениями $\beta \to \delta'$, $\gamma \to \delta'$, а потом уравнять композиции:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & \beta \arrow[dr] & & \\ \alpha \arrow[ur] \arrow[dr] & & \delta' \arrow[r] & \delta \\ & \gamma \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Последняя диаграмма определяет коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & F_\beta(Y) \arrow[dr] & \\ F_\delta(Y) \arrow[ur] \arrow[dr] & & F_\alpha(Y) \\ & F_\gamma(Y) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Любая точка из $I_\beta(Y)$ содержится в образе $F_\delta(Y)$. Поэтому, в силу коммутативности, образ $I_\beta(Y)$ лежит в $F_\gamma(Y)$. Так как исходное отображение $\alpha \to \gamma$ было произвольно, то мы доказали, что образ $I_\beta(Y)$ содержится в $I_\alpha(Y)$.]

Ясно, что проективный предел $\varprojlim_\alpha F_\alpha$ по категории $\{\alpha\}$ канонически изоморфен обычному проективному пределу

$\varprojlim_{\alpha} I_\alpha$ по категории $\{\alpha\}$, в которой все морфизмы $\alpha \rightrightarrows \beta$ склеены в один морфизм $\alpha \xrightarrow{\alpha\beta} \beta$. Ясно, далее, что для любого гомотопического типа Y пространство $I_\alpha(Y)$ является компактным и хаусдорфовым и что оно непусто, если $F_\beta(Y)$ непусто ни при каком β. (Для проверки того, что $I_\alpha(Y)$ непусто, надо, рассуждая так же, как и раньше, проверить непустоту конечных пересечений образов $F_\beta(Y)$.)

Конечно, $F_\alpha(Y)$ всегда содержит постоянное отображение и, следовательно, функтор

$$Y \xrightarrow{\varprojlim_{\alpha} F_\alpha} \varprojlim_{\alpha} F_\alpha(Y)$$

относит каждому Y непустое компактное хаусдорфово пространство. (Мы используем здесь фундаментальный факт (**): *проективный предел непустых компактных хаусдорфовых пространств есть непустое компактное хаусдорфово пространство.*)

Для того чтобы доказать представимость функтора

$$G = \varprojlim_{\alpha} F_\alpha,$$

нам надо проверить две аксиомы Брауна:

(i) экспоненциальный закон;

(ii) свойство Майера — Виеториса [1]).

Первое условие заключается в том, что естественное отображение

$$G\left(\bigvee_\beta Y_\beta\right) \to \prod_\beta G(Y_\beta)$$

должно быть изоморфизмом для произвольного семейства пространств $\{Y_\beta\}$. Выполнение этого условия сразу следует из перестановочности проективного предела

---

[1]) Подразумевается теорема Брауна, утверждающая, что проверяемые ниже условия обеспечивают представимость функтора; см. Спеньер Е., Алгебраическая топология, «Мир», М., 1971, гл. VII, § 7. — *Прим. ред.*

с произвольными перемножениями. Оно не использует компактности функторов F_α.

Второе условие более деликатно, и его проверка часто оказывается непреодолимым препятствием. Если $Y = A \cup B$ и $Z = A \cap B$ (все это — комплексы и подкомплексы) и мы выбрали элементы множеств $G(A)$ и $G(B)$, индуцирующие один и тот же элемент множества $G(Z)$, то должен найтись хотя бы один элемент множества $G(Y)$, ограничение которого на A и B совпадает с выбранными элементами.

Это верно для каждого α, так как F_α — представимый функтор. При этом ясно, что множество подходящих элементов множества $F_\alpha(A \cup B)$ является компактным. Используя фундаментальный факт (**), мы видим, что проективный предел этих множеств не является пустым. Следовательно, функтор $\varprojlim F = G$ обладает свойством Майера — Виеториса.

Из теоремы Брауна следует, что существует такой CW-комплекс V, что

$$\varprojlim_{\alpha} F_\alpha \cong [\ \ , V].$$

В процессе доказательства предложения 3.1 мы приняли без доказательства два утверждения. Докажем их.

Первое: если Y — конечный комплекс и F — пространство с конечными гомотопическими группами, то множество $[Y, F]$ конечно. Это доказывается несложной индукцией по числу клеток пространства Y. Надо только вспомнить, что число гомотопических классов продолжений отображения на область определения этого отображения с приклеенной i-мерной клеткой не превышает числа элементов группы $\pi_i(F)$.

Второе: естественное отображение

$$[Y, F] \xrightarrow{r} \varprojlim_{\{\alpha\}} [Y_\alpha, F],$$

где $\{\alpha\}$ — направленное множество конечных подкомплексов в Y, является изоморфизмом.

Доказательство естественно разбивается на две части.

Первый шаг. *Отображение r сюръективно при любых Y, F.* Пусть x — элемент проективного предела. Обозначим через β такое направленное подмножество в $\{\alpha\}$, что вместе с каждым элементом оно содержит все меньшие, и при этом существует отображение

$$Y_\beta = \bigcup_{\alpha \in \beta} Y_\alpha \xrightarrow{x_\beta} F,$$

представляющее элемент x/β. Множество $\mathscr{B}$ таких пар (β, x_β) мы упорядочим условием: $(\beta, x_\beta) \leqslant (\beta', x_{\beta'})$, если $\beta \subseteq \beta'$, и ограничение отображения $x_{\beta'}$ на Y_β гомотопно x_β. Любая линейная упорядоченная цепочка в $\mathscr{B}$ счетна (так как это верно для $\{\alpha\}$). Пусть $(\beta_1, x_{\beta_1}) \leqslant \ldots$ — линейно упорядоченная цепочка в $\mathscr{B}$. Используя конструкцию бесконечного телескопа, возникающего из вложений комплексов Y_β, мы видим, что любое линейно упорядоченное подмножество в $\mathscr{B}$ имеет верхнюю грань. Следовательно, согласно лемме Цорна, в множестве $\mathscr{B}$ есть максимальные элементы; пусть (β_0, x_{β_0}) — один из них. Если $\beta_0 \neq \{\alpha\}$, то существует конечный комплекс Y_{α_0}, не лежащий в β_0, и простые аддиционные гомотопические соображения показывают, что отображение $x_{\beta_0}\colon Y_{\beta_0} \to F$ продолжается до отображения $Y_{\beta_0} \cup Y_{\alpha_0} \to F$, а это противоречит максимальности β_0. Следовательно, $\beta_0 = \{\alpha\}$ и r — эпиморфизм.

Второй шаг. *Если группы $\pi_i F$ конечны, то отображение r есть вложение.* Пусть f, g — отображения комплекса Y, индуцирующие одинаковые элементы в проективном пределе. Тогда сужения отображений f, g на любой конечный подкомплекс Y_α гомотопны. Так как группы $\pi_i(F)$ конечны, то существует лишь конечное число различных гомотопических классов гомотопий, связывающих сужения отображений f и g на Y_α. Эти гомотопические классы гомотопий, связывающие отображения f и g, образуют проективную систему конечных множеств (над категорией $\{\alpha\}$). Опять-таки, по соображениям компактности, проективный предел не пуст. Повторяя

рассуждения первого шага, мы можем убедиться в том, что этот проективный предел гомотопий можно реализовать настоящей гомотопией между отображениями f и g.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРОКОНЕЧНОГО ПОПОЛНЕНИЯ

Мы изучим теперь группы гомотопий и группы когомологий проконечного пополнения $\hat{X}$.

Предложение 3.4. *Если X $(k-1)$-связно, то имеет место изоморфизм*

$$\pi_k\hat{X} \cong (\pi_k X)\hat{\ }$$

топологических групп.

Доказательство. Согласно определению $\hat{X}$,

$$\pi_k\hat{X} = \varprojlim_{\{f\}} \pi_k F.$$

Любой конечный фактор

$$\pi_k X \xrightarrow{r} \pi$$

индуцирует элемент этой проективной системы, а именно

$$X \xrightarrow{\text{первый } k\text{-инвариант}} K(\pi_k X,\ k) \xrightarrow{r} K(\pi,\ k).$$

Используя накрывающие пространства при $k=1$ и теорию препятствий при $k>1$, легко показать, что полная подкатегория категории $\{f\}$, состоящая из таких отображений $X \to F$, что F является $(k-1)$-связным и $\pi_k(X) \to \pi_k(F)$ есть эпиморфизм, конфинальна.

Прежде чем изучать связь между высшими гомотопиями пространств X и $\hat{X}$, рассмотрим когомологии. Имеется естественная диаграмма

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & H^i(\hat{X};\ \mathbb{Z}/n) \arrow[dl, "r"'] & \\ H^i(X;\ \mathbb{Z}/n) & & \varinjlim_{\{f\}} H^i(F;\ \mathbb{Z}/n) \arrow[ul, "c"'] \arrow[ll, "l"'] \end{tikzcd}$$

Предложение 3.5. *Отображение l является изоморфизмом при любых n, i.*

Доказательство. Для того чтобы доказать эпиморфность отображения l, достаточно заметить, что для любого класса $x \in H^i(X; \mathbb{Z}/n)$ отображение

$$(X \xrightarrow{f} F) = (X \xrightarrow{x} K(\mathbb{Z}/n, i))$$

переводится отображением l в этот класс x.

Для доказательства инъективности отображения l рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} & F' \arrow[d] \\ X \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & F \arrow[d, "x"] \\ & K(\mathbb{Z}/n, i) \end{tikzcd}$$

где $x \in H^i(F; \mathbb{Z}/n)$ — некоторый класс, индуцирующий нулевой класс в когомологиях X, вертикальная последовательность представляет собой расслоение и f' — некоторое поднятие отображения f. Предложение доказано.

Каноническое прямое слагаемое $\operatorname{Im} c$ в группе $H^i(\hat{X}; \mathbb{Z}/n)$ тесно связано с непрерывными когомологиями пространства $\hat{X}$, т. е. с такими гомотопическими классами отображений

$$X \to K(\mathbb{Z}/n, i),$$

которые индуцируют непрерывное отображение между компактными представимыми функторами $[\ ,\hat{X}]$ и $[\ , K(\mathbb{Z}/n, i)]$.

Предложение 3.6. *Рассмотрим две естественные подгруппы группы $H^i(\hat{X}; \mathbb{Z}/n)$:*

$$L = \varinjlim_{\{f\}} H^i(F; \mathbb{Z}/n) \cong H^i(X; \mathbb{Z}/n),$$

$$C = \text{«непрерывные когомологии пространства } \hat{X}\text{»}.$$

Тогда

$$L \subseteq C \subseteq \operatorname{cl} L.$$

Доказательство. «Распутаем» определение группы C. Она состоит из таких классов отображений

$$\hat{X} \xrightarrow{x} K(\mathbb{Z}/n, i),$$

что для любого пространства Y индуцированное отображение

$$\begin{array}{ccc} [Y, \hat{X}] & \xrightarrow{x_*} & [Y, K(\mathbb{Z}/n, i)] \\ \| & & \| \\ \varprojlim\limits_{\{f\}} [Y, F] & & \varprojlim\limits_{\alpha} [Y_\alpha, K(\mathbb{Z}/n, i)] \end{array}$$

непрерывно. Это значит, что для любого конечного подкомплекса $Y_\alpha \subseteq Y$ существуют проекция f_α пространства X в пространство F_α с конечными группами гомотопий и (непрерывное) отображение

$$[Y, F_\alpha] \xrightarrow{g_\alpha} H^i(Y_\alpha; \mathbb{Z}/n),$$

такие, что диаграмма

$$\text{(I)} \qquad \begin{array}{ccc} [Y, \hat{X}] & \xrightarrow{x_*} & [Y, K(\mathbb{Z}/n, i)] \\ \big\downarrow{\scriptstyle\text{проекция}} & & \big\downarrow{\scriptstyle\text{сужение}} \\ [Y, F_\alpha] & \xrightarrow{g_\alpha} & [Y_\alpha, K(\mathbb{Z}/n, i)] \end{array}$$

коммутативна. Более того, отображение $\{Y_\alpha \to f_\alpha\}$ должно сохранять порядок и отображения g_α с разными α должны быть согласованы. Из этого следует, что любой элемент группы

$$L = \varinjlim_{\{f\}} H^i(F; \mathbb{Z}/n)$$

определяет непрерывный класс когомологий. Действительно, если класс $l \in L$ происходит из элемента $u \in H^i(F; \mathbb{Z}/n)$ при отображении $X \to F$, то для любого конечного подкомплекса $Y_\alpha \subseteq Y$ мы можем положить

$$f_\alpha = (X \to F),$$
$$g_\alpha = ([Y, F] \xrightarrow{u/} [Y_\alpha, K(\mathbb{Z}/n, i)]).$$

Обратно, пусть $x \in H^i(\hat{X}; \mathbb{Z}/n)$ — непрерывный класс когомологий; положим $Y = \hat{X}$ и рассмотрим коммутативную диаграмму (I), соответствующую тождественному отображению $\hat{X} \to \hat{X}$. Мы увидим, что для каждого конечного подкомплекса $X_\alpha \subseteq \hat{X}$ сужение отображения x на X_α пропускается через некоторое F_α:

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{x} & K(\mathbb{Z}/n, i) \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle x'} \\ X_\alpha & \longrightarrow & F_\alpha \end{array}$$

Элемент группы L, определяемый x', имеет то же сужение на X_α, что и x. Таким образом, сужения групп L, C на когомологии любого конечного подкомплекса комплекса $\hat{X}$ совпадают.

Таким образом, C не может быть больше, чем $\operatorname{cl} L$: любая точка, лежащая вне $\operatorname{cl} L$, отделяется от $\operatorname{cl} L$ в одном из конечных факторов $H^i(X_\alpha; \mathbb{Z}/n)$.

Лемма 3.7. *Предположим, что X имеет «счетный тип», т. е. группы*

$$\operatorname{Hom}(\pi_1 X, \text{конечная группа}), \quad H^i(X; \mathbb{Z}/n)$$

счетны. Тогда пополнение $\hat{X}$ является простым проективным пределом

$$\hat{X} \cong \varprojlim_n \{\ldots \to F_n \to F_{n-1} \to \ldots \to *\}$$

пространств F_n с конечными гомотопическими группами, у каждого из которых есть только конечное число ненулевых гомотопических групп.

Доказательство. Обозначим через $F_{(n)}$ «n-остов F», получаемый из F присоединением клеток, убивающих гомотопические группы размерностей $> n$. Для пространства F с конечными гомотопическими группами имеет место изоморфизм

$$[\ \ , F] \cong \varprojlim [\ \ , F_{(n)}]$$

компактных представимых функторов. Поэтому пополнение

$$\hat{X} = \varprojlim_{\{f\}} F = \varprojlim_{\{f\}} \varprojlim_{n} F_{(n)}$$

является проективным пределом пространств с конечными гомотопическими группами, тривиальными за исключением конечного их числа.

Множество гомотопических типов таких пространств счетно, а множество гомотопических классов отображений одного такого пространства в другое конечно.

Далее, согласно условию леммы, множество гомотопических классов отображений $X \to F_{(n)}$ счетно. Поэтому $\hat{X}$ есть проективный предел по индексирующей категории C, у которой число объектов счетно и множество отображений между любыми двумя объектами конечно. В такой категории C можно выбрать линейно упорядоченную конфинальную подкатегорию

$$1 \to 2 \to \ldots \to n \to \ldots .$$

Это означает, что любой объект O из C можно отобразить в некоторый объект n, и при этом любые два отображения

$$O \rightrightarrows n$$

можно уравнять отображением $n \to m$:

$$O \rightrightarrows n \to m.$$

(Действительно, упорядочим объекты из C в последовательность O_1, O_2, ... и предположим, что уже построен кусок $1 \to 2 \to \ldots \to r$, такой, что любой из объектов $O_1, \ldots, O_n$ можно отобразить в r. Выберем такой морфизм

$$r \xrightarrow{f} r+1,$$

что объект O_{n+1} можно отобразить в $r+1$ и f уравнивает все элементы множеств $\mathrm{Hom}(O_i, r)$ с $i \leqslant n$ и т. д.)

Итак, мы построили такую последовательность пространств

$$\ldots \to F_n \to \ldots \to F_2 \to F_1,$$

что

$$\hat{X} \cong \varprojlim_{n} F_n.$$

Предложение 3.8. *Предположим, что все множества*

$$\mathrm{Hom}\,(\pi_1 X, \text{конечная группа})$$

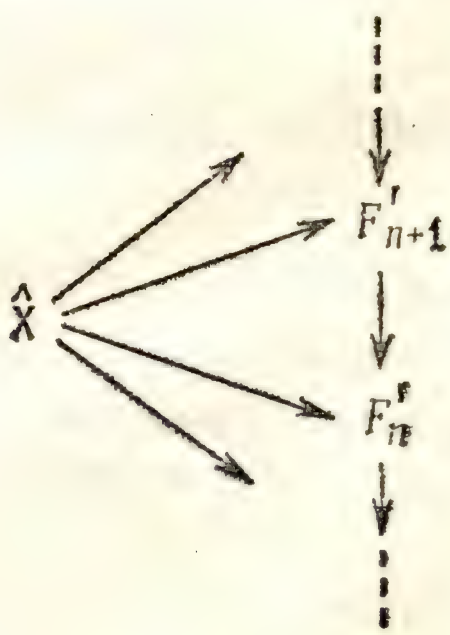
счетны и что при всех n и i группы $H^i(X; \mathbb{Z}/n)$ конечны. Тогда для любой конечной области коэффициентов A естественное отображение

$$H^i(X; A) \leftarrow H^i(\hat{X}; A)$$

является изоморфизмом при всех i.

Доказательство. Мы построим вспомогательное пространство F_∞, используя лемму 3.7. Пусть $X = \varprojlim F_n$. Превратим (индуктивно) отображения $F_{n+1} \to F_n$ в расслоения $F'_{n+1} \to F'_n$ и определим F_∞ как геометрическую реализацию проективного предела сингулярных комплексов пространств F'_n.

Утверждение: *$\hat{X}$ есть ретракт пространства F_∞.* Действительно, отображения $F_\infty \to F'_n$ индуцируют отображение $F_\infty \to \hat{X}$. С другой стороны, имеются отображения $\hat{X} \to F_n$, и, последовательно применяя теорему о накрывающей гомотопии, можно построить коммутативную диаграмму



определяющую в свою очередь отображение $\hat{X} \to F_\infty$. Из определения $\hat{X}$ следует, что композиция

$$\hat{X} \to F_\infty \to \hat{X}$$

является тождественным отображением. Поэтому группа $H^*(\hat{X}; \mathbb{Z}/n)$ является прямым слагаемым в $H^*(F_\infty; \mathbb{Z}/n)$. Но группы когомологий $H^*(F_\infty; \mathbb{Z}/n)$ двойственны группам гомологий $H_*(F_\infty; \mathbb{Z}/n)$[1]. Последние можно вычислить с помощью цепного комплекса

$$(\varprojlim_i C_i) \otimes \mathbb{Z}/n,$$

где C_i — сингулярный цепной комплекс (над $\mathbb{Z}$) пространства F'_i.

Так как отображения $F'_{i+1} \to F'_i$ являются расслоениями, то соответствующие отображения

$$C_{i+1} \to C_i$$

являются эпиморфизмами. Поэтому

$$(\varprojlim C_i) \otimes \mathbb{Z}/n \cong \varprojlim (C_i \otimes \mathbb{Z}/n)$$

и

$$H_*(F_\infty; \mathbb{Z}/n) \cong H(\varprojlim C'_i),$$

где $C'_i = C_i \otimes \mathbb{Z}/n$. Отображения $C'_{i+1} \to C'_i$ снова являются эпиморфизмами, и поэтому в силу доказываемой ниже леммы 3.9

$$H(\varprojlim C'_i) \cong \varprojlim H(C'_i).$$

Следовательно,

$$H_*(F_\infty; \mathbb{Z}/n) \cong \varprojlim H_*(F_i),$$

[1]) По-видимому, подразумевается двойственность Понтрягина

$$\operatorname{Char} H_*(X; G) = H^*(X; \operatorname{Char} G)$$

(см. Александров П. С., Общая теория гомологий, Уч. зап. МГУ, Математика, вып. 45 (1940), или Pontrjagin L., The general topological theory of duality for closed sets, *Ann. Math.*, **35** (1934), 904—914), связывающая рассматриваемые группы ввиду равенства $\operatorname{Char}(\mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/n$. — *Прим. ред.*

а так как в силу предложения 3.5 группы

$$\varinjlim H^*(F_i; \mathbb{Z}/n) \cong H^*(X; \mathbb{Z}/n)$$

конечны, то имеется и двойственный изоморфизм

$$H^*(F_\infty; \mathbb{Z}/n) \cong \varinjlim H^*(F_i; \mathbb{Z}/n).$$

Таким образом, в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & H^*(\hat{X}; \mathbb{Z}/n) \arrow[dl, "c"'] & \\
H^*(X; \mathbb{Z}/n) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \varprojlim H^*(F_i; \mathbb{Z}/n) \arrow[u, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

отображение j является эпиморфизмом. Следовательно, c — изоморфизм.

Мы доказали предложение в случае $A = \mathbb{Z}/n$. Общий случай получается из этого прямым сложением.

Лемма 3.9. *Пусть*

$$\ldots \to C_{i+1} \xrightarrow{\varphi_i} C_i \to \ldots \to C_0$$

— проективная система цепных комплексов. Предположим, что все отображения φ_i являются эпиморфизмами и что гомологические группы каждого из комплексов C_i конечны (в каждой размерности). Тогда

$$H(\varprojlim C_i) \cong \varprojlim H(C_i).$$

Доказательство. Мы говорим, что проективная система групп

$$\ldots \to A_i \to A_{i-1} \to \ldots \to A_0$$

обладает свойством ML (Миттаг-Лефлера), если для каждого номера i существует такой номер $N > i$, что

$$\bigcap_{n > i} \operatorname{Im}(A_n \to A_i) = \operatorname{Im}(A_N \to A_i).$$

Значение условия ML определяется следующим фактом: если

$$0 \to A_i \to B_i \to C_i \to 0$$

— проективная система коротких точных последовательностей и система $\{A_i\}$ обладает свойством ML, то последовательность

$$0 \to \varprojlim A_i \to \varprojlim B_i \to \varprojlim C_i \to 0$$

точна.

Обозначим через C цепной комплекс $\varprojlim C_i$ или одну из его групп. Обозначим, далее, через Z, B и H соответствующие группы циклов, границ и гомологических классов в какой-нибудь (фиксированной) размерности. Аналогично, рассмотрим группы C_i, Z_i, B_i и H_i.

Доказательство леммы разбивается на восемь шагов:

(0) $C = \varprojlim C_i$ (по определению);

(1) $Z = \varprojlim Z_i$ (верно всегда);

(2) $\{B_i\}$ удовлетворяет условию ML (т. к. φ_i — эпиморфизм);

(3) $\{Z_i\}$ удовлетворяет условию ML (конечность гомологий);

(4) $0 \to \varprojlim Z_i \to \varprojlim C_i \to \varprojlim B_i \to 0$ (см. (3));

(5) $\varprojlim B_i = B$ $(0 \to Z \to C \to B \to 0$ ((0), (1) и (4));

(6) $0 \to \varprojlim B_i \to \varprojlim Z_i \to \varprojlim H_i \to 0$ (см. (2));

(7) $\varprojlim H_i = H$ $(0 \to B \to Z \to H \to 0$ ((1), (5) и (6)).

Прежде чем вывести некоторые следствия из предложения 3.8 и его доказательства, мы докажем одну алгебраическую лемму:

Лемма 3.10. *Предположим, что $\pi \xrightarrow{c} \pi'$ — такой гомоморфизм одной абелевой группы в другую, что*

(i) *$c \otimes \mathbb{Z}/n$ есть изоморфизм конечных групп;*

(ii) *π' представляется как проективный предел конечных групп.*

Тогда $\pi' = \hat{\pi}$ и c есть проконечное пополнение.

Доказательство. Заметим, что из конечности групп $G \otimes \mathbb{Z}/n$ следует, что

$$\hat{G} \cong \varprojlim_{n} (G \otimes \mathbb{Z}/n).$$

Следовательно, c индуцирует изоморфизм проконечных пополнений:

$$\hat{\pi} = \varprojlim (\pi \otimes \mathbb{Z}/n) \xrightarrow{\varprojlim c \otimes \mathbb{Z}/n} \varprojlim (\pi' \otimes \mathbb{Z}/n) = \hat{\pi}',$$

и нам остается доказать, что $\hat{\pi}' = \pi'$. Топологизируем π' как проективный предел:

$$\pi' \cong \varprojlim_{\alpha} F_\alpha,$$

где F_α — проективная система конечных групп. Ясно, что операция умножения в группе π' на n является непрерывным отображением (поскольку непрерывны отображения $F_\alpha \xrightarrow{\cdot n} F_\alpha$). Поэтому $n\pi'$ есть замкнутая компактная подгруппа группы π', а так как фактор

$$\pi'/n\pi' = \pi' \otimes \mathbb{Z}/n$$

конечен, то подгруппа $n\pi'$ также и открыта в π'. Следовательно, естественное отображение

$$\pi' \xrightarrow{l} \lim (\pi' \otimes \mathbb{Z}/n) = \hat{\pi}'$$

непрерывно.

Поскольку группа π' компактна, то образ $l(\pi')$ замкнут в $\hat{\pi}'$. С другой стороны, он плотен в $\hat{\pi}'$. Поэтому отображение l является эпиморфизмом. Но, с другой стороны, ясно, что для любой проконечной группы π' отображение

$$\pi' \to \hat{\pi}'$$

является вложением. Следовательно, $\pi' \cong \hat{\pi}'$.

Заметим, что в процессе доказательства мы выяснили, что если π' — такая абелева проконечная группа, что все группы $\pi' \otimes \mathbb{Z}/n$ конечны, то проконечная топология на группе π' восстанавливается по ее алгебраической структуре, а именно

$$\pi' \cong \hat{\pi}'.$$

Мы сейчас покажем, как этот результат переносится на гомотопические типы.

На время обозначим через $|\hat{X}|$ CW-комплекс, представляющий функтор $\hat{X}$ (лишенный топологии).

Следствие 3.11. *Если $\pi_1 X = 0$ и группы $H^i(X; \mathbb{Z}/n)$ конечны при любых i, n, то*

$$(|\hat{X}|)\hat{} \cong \hat{X}.$$

Доказательство. Согласно предложению 3.8, естественное отображение

$$X \to |\hat{X}|$$

индуцирует изоморфизм групп когомологий $\operatorname{mod} n$. Как показывает теория препятствий, любое отображение комплекса X в односвязное пространство F с конечными гомотопическими группами однозначно пропускается через $|\hat{X}|$. Поэтому функторы $\hat{X}$ и $(|\hat{X}|)\hat{}$ определяются одной и той же проективной системой.

Следствие. *В односвязном «конечном» случае топология в функторе $[\ \ , \hat{X}]$ определяется гомотопическим типом самого $|\hat{X}|$.*

Замечание. Условие односвязности, вероятно, не является здесь необходимым: можно надеяться, что предложение 3.8 обобщается на случай конечных локальных коэффициентов, а из этого бы следовало, что топология на функторе $[\ \ , \hat{X}]$ определяется комплексом $|\hat{X}|$ для любого «конечного» гомотопического типа X. Этот факт, очевидно, справедлив для неодносвязных пространств F с *конечными* гомотопическими группами (так как тогда $\hat{F} \cong F$).

Следствие 3.12. *Предположим, что группы $H_i X\,[= H_i(X; \mathbb{Z})]$ конечно порождены и что все множества*

$$\operatorname{Hom}(\pi_1 X, \text{конечная группа})$$

счетны. Тогда естественное отображение

$$H_iX \to H_i\widehat{X}$$

является проконечным пополнением.

Доказательство. Мы используем пространство F_∞, построенное при доказательстве предложения 3.8. Рассмотрим (целочисленную) диаграмму

$$\begin{tikzcd} H_*\widehat{X} \arrow[r, shift left, "i"] & H_*F_\infty \arrow[l, shift left, "j"] \arrow[d, "u"] \\ H_*X \arrow[u, "c"] \arrow[r, "l"'] & \varprojlim H_*F_i \end{tikzcd}$$

Согласно лемме 3.9, u есть изоморфизм. Далее, по определению, отображение $i \circ j$ является тождественным. Кроме того, аналогичная диаграмма с коэффициентами в $\mathbb{Z}/n$ состоит из конечных групп и изоморфизмов. Для сравнения $\widehat{X}$ с F_∞ и $\widehat{X}$ с X мы можем воспользоваться естественной точной последовательностью

$$0 \to \operatorname{Tor}(H_{i-1}Y, \mathbb{Z}/n) \to H_i(Y; \mathbb{Z}/n) \to H_iY \otimes \mathbb{Z}/n \to 0.$$

Из этой последовательности видно, что если j есть изоморфизм в размерности $i-1$, то $j \otimes \mathbb{Z}/n$ есть изоморфизм в размерности i. Рассуждения, использованные при доказательстве леммы 3.10, показывают, что естественное отображение

$$H_iF_\infty \to \varprojlim (H_iF_\infty \otimes \mathbb{Z}/n)$$

является изоморфизмом. Поэтому прямое слагаемое $jH_i\widehat{X} \subseteq H_iF_\infty$ совпадает со всем H_iF_∞. Наконец, индукция по i добавляет изоморфизм

$$H_*\widehat{X} \cong H_*F_\infty.$$

[Более подробно: если отображение $H_{i-1}X \to H_{i-1}\widehat{X}$ является проконечным пополнением, то отображение $H_iX \otimes \mathbb{Z}/n \to H_i\widehat{X} \otimes \mathbb{Z}/n$ является изоморфизмом, из чего следует, в силу леммы 3.10, что отображение $H_iX \to H_i\widehat{X}$ является проконечным пополне-

нием; здесь мы используем равенство $\mathrm{Tor}(G, \mathbb{Z}/n) \cong \mathrm{Tor}(\widehat{G}, \mathbb{Z}/n)$, справедливое для произвольной конечно порожденной абелевой группы G.]

Теперь рассмотрим высшие гомотопические группы пространства $\widehat{X}$. Они, вообще говоря, являются проконечными группами. Их удается связать с гомотопическими группами пространства X лишь при сильных ограничениях на фундаментальную группу пространства X. Мы будем предполагать, что все гомотопические группы пространства X (включая и фундаментальную) являются конечно порожденными абелевыми группами. Кроме того, мы предположим, что группы $\pi_1 X$ и $\pi_1 \widehat{X}$ тривиально действуют в когомологиях $\mathrm{mod}\, n$ универсальных накрывающих пространств X и $\widehat{X}$.

Предложение 3.13. *При указанных ограничениях естественные отображения*

$$\pi_i X \to \pi_i \widehat{X}$$

являются проконечными пополнениями.

Доказательство. Хотя случай $i = 1$ мы уже разобрали, передокажем утверждение в этом случае, но таким способом, который будет применим и к $i > 1$.

Согласно предложению 3.8, отображение $c\colon X \to \widehat{X}$ индуцирует изоморфизмы в когомологиях $\mathrm{mod}\, n$ (которые конечны). Далее, гомоморфизм $\pi_1 X \to \pi_1 \widehat{X}$ совпадает с гомоморфизмом $H_1 X \to H_1 \widehat{X}$. Следовательно, тензорное умножение на $\mathbb{Z}/n$ делает отображение $\pi_1 X \to \pi_1 \widehat{X}$ изоморфизмом. Кроме того, $\pi_1 \widehat{X}$ есть проконечная группа и потому, согласно лемме 3.10, отображение $\pi_1 X \to \pi_1 \widehat{X}$ является проконечным пополнением.

Дальнейшие рассуждения основываются на следующем предложении, которое будет доказано ниже (см. стр. 96): если π — конечно порожденная абелева группа, то естественные отображения $K(\pi, m) \to K(\hat{\pi}, m)$ индуцируют изоморфизм в когомологиях $\mathrm{mod}\, n$.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{d} & (\widehat{X})_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{c} & \widehat{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(\pi_1 X,\ 1) & \xrightarrow{c_1} & K(\pi_1 \widehat{X},\ 1) \end{array}$$

в которой столбцы представляют собой естественные расслоения, причем слои X_1, $(\widehat{X})_1$ — универсальные накрывающие над X, $\widehat{X}$. Поскольку группы $\pi_1 X$, $\pi_1 \widehat{X}$ тривиально действуют в когомологиях пространств X_1, $(\widehat{X})_1$, спектральные последовательности указанных расслоений показывают, что когомологии $\operatorname{mod} n$ пространств X_1, $(\widehat{X})_1$ конечны, а так как c и c_1 индуцируют в когомологиях $\operatorname{mod} n$ изоморфизм, то и d индуцирует изоморфизм в когомологиях $\operatorname{mod} n$. Следовательно, d индуцирует изоморфизм и в гомологиях $\operatorname{mod} n$, а потому $d_*\colon H_r X_1 \to H_r \widehat{X}_1$ есть проконечное пополнение. Таким образом, гомоморфизм

$$\begin{aligned}(c_*\colon\ \pi_2 X \to \pi_2 \widehat{X}) &= (d_*\colon\ \pi_2 X_1 \to \pi_2 (\widehat{X})_1) = \\ &= (d_*\colon\ H_2 X_1 \to H_2 (\widehat{X})_1)\end{aligned}$$

является проконечным пополнением. Дальнейшее рассуждение подобно этому, только универсальные накрытия заменяются «убивающими пространствами» [1]). Например, для доказательства того, что $c_*\colon\ \pi_3 X \to \pi_3 \widehat{X}$ есть проконечное пополнение, необходимо рассмотреть диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X_2 & \xrightarrow{e} & (\widehat{X})_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \xrightarrow{d} & (\widehat{X})_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(\pi_2 X_1,\ 2) & \xrightarrow{d_2} & K(\pi_2 (\widehat{X})_1,\ 2) \end{array}$$

---

[1]) См., например, Серр Ж.-П., Гомотопические группы и классы абелевых групп, сб. «Расслоенные пространства», ИЛ, М., 1958, стр. 138. — *Прим. ред.*

Это рассуждение фактически доказывает следующее, более сильное предложение.

Следствие 3.14. *Пусть f: $X \to Y$ — такое отображение одного односвязного пространства в другое, что*

(a) *группы $\pi_i(X)$ конечно порождены;*
(b) *группы $\pi_i(Y)$ проконечны;*
(c) *f индуцирует изоморфизм в когомологиях* mod n.

Тогда f эквивалентно проконечному пополнению:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "\text{проконечное пополнение}"'] & Y \arrow[d, "\text{слабая гомотопическая эквивалентность}"] \\ & \hat{X} \end{tikzcd}$$

Доказательство. Доказательство предложения 3.13 показывает, что отображение f индуцирует проконечное пополнение в гомотопических группах. Но в силу теории препятствий отображение пространства X в любое односвязное пространство с конечными гомотопическими группами однозначно пропускается через Y. Поэтому существует отображение $Y \to \hat{X}$, индуцирующее изоморфизм гомотопических групп.

Мы завершим общее изучение функтора пополнения доказательством следующего предложения.

Следствие 3.15. *Пусть c: $X \to Y$ — отображение одного односвязного пространства в другое, и пусть группы $\pi_i(X)$ конечно порождены. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *c пополняет гомотопические группы*

$$\begin{tikzcd} \pi_i X \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "\text{проконечное пополнение}"'] & \pi_i Y \arrow[d, "\cong"] \\ & (\pi_i X)^{\wedge} \end{tikzcd}$$

(ii) *c пополняет приведенные группы целочисленных гомологий*

$$\begin{tikzcd} \tilde{H}_i X \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "\text{проконечное пополнение}"'] & \tilde{H}_i Y \arrow[d] \\ & (\tilde{H}_i X)\hat{} \end{tikzcd}$$

(iii) *группы* $\pi_i Y$ *проконечны и отображение* c *индуцирует изоморфизм групп когомологий* mod n;

(iv) *c является проконечным пополнением.*

Заметим, что при выполнении этих условий $\hat{X} = Y$ и потому гомотопический тип пространства $\hat{X}$ определяет топологию на функторе $[\ \ , \hat{X}]$.

Доказательство. Мы уже показали, что (i) и (ii) следуют из (iv) и что (iii) эквивалентно (iv). Стандартное рассуждение с убивающими пространствами и спектральными последовательностями (ср. доказательство предложения 3.13) показывает, что (i) следует из (ii). Далее, формула универсальных коэффициентов показывает, что и (iii) следует из (ii). Наконец, индукция по разложению Постникова вместе с доказываемой ниже леммой показывает, что (iii) следует из (i). (Ср. конец гл. 2, где более подробно проводятся аналогичные рассуждения.) Теперь докажем утверждение, использовавшееся в доказательстве предложения 3.13 (и ниже).

Лемма. *Если* π — *конечно порожденная абелева группа, то отображение*

$$K(\pi, m) \to K(\hat{\pi}, m)$$

индуцирует изоморфизм когомологий mod n.

Доказательство. С помощью диаграммы

$$\begin{array}{ccc} K(\pi, m-1) & \to & K(\hat{\pi}, m-1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{\text{пути}\} & & \{\text{пути}\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(\pi, m) & \to & K(\hat{\pi}, m) \end{array}$$

можно привести общий случай к случаю $m=1$. Далее, этот случай сводится к случаю, когда $\pi=\mathbb{Z}$ или $\pi=\mathbb{Z}/n$. Так как во втором случае $\hat{\pi}=\pi$, то достаточно разобрать случай $\pi=\mathbb{Z}$.

Компактно представимый функтор $[\ \ , K(\hat{\mathbb{Z}}, 1)]$ совпадает с проективным пределом $\varprojlim_n [\ \ , K(\mathbb{Z}/n, 1)]$. Как это видно из доказательства предложения 3.8, приведенные группы гомологий $\operatorname{mod} n$ пространства $K(\hat{\mathbb{Z}}, 1)$ являются прямыми слагаемыми групп

$$\varprojlim_i \tilde{H}_q(K(\mathbb{Z}/i, 1); \mathbb{Z}/n).$$

Легко видеть, что этот предел равен $\mathbb{Z}/n$ при $q=1$ и 0 при $q>1$. С другой стороны,

$$H_1(K(\hat{\mathbb{Z}}, 1); \mathbb{Z}/n)=\hat{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{Z}/n=\mathbb{Z}/n.$$

Следовательно,

$$H_*(K(\mathbb{Z}, 1); \mathbb{Z}/n)\xrightarrow{\cong}H_*(K(\hat{\mathbb{Z}}, 1); \mathbb{Z}/n).$$

Примеры. (i) Если G — конечно порожденная абелева группа, то

$$K(G, n)\hat{}\cong K(\hat{G}, n)\cong K(G\otimes\hat{\mathbb{Z}}, n).$$

(ii) Если гомотопические группы π_*X конечны, то $X\cong X$.

(iii) $\hat{S}^n$ есть пространство Мура $M(\hat{\mathbb{Z}}, n)$.

(iv) $K(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, 1)\hat{}\cong(\mathbb{C}P^\infty)\hat{}$.

[Действительно, расслоение $K(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, 1)\xrightarrow{\delta}K(\mathbb{Z}, 2)\cong\mathbb{C}P^\infty$ (со слоем $K(\mathbb{Q}, 1)$) индуцирует изоморфизм в когомологиях $\operatorname{mod} n$, которые к тому же являются конечными группами. Далее, $\hat{\delta}$ есть отображение односвязного пространства в односвязное; эти пространства имеют проконечные гомотопические группы, и отображение $\hat{\delta}$ также индуцирует изоморфизм в когомологиях $\operatorname{mod} n$. Как было показано выше, из этого следует, что $\hat{\delta}$ есть гомотопическая эквивалентность.]

(v) Недавний результат Квиллена, сравнивающий вычисления Мильграма и Накаоки, наводит на мысль о том, что

$$\{\text{проконечное пополнение } K(S_\infty,\ 1)\} \cong \varinjlim_n (\Omega^n S^n)_0.$$

[Здесь S_∞ есть индуктивный предел симметрических групп, а индекс «нуль» означает компоненту постоянного отображения[1]).] Во всяком случае имеется отображение

$$K(S_\infty,\ 1)\hat{}\ \to \varinjlim (\Omega^n \delta^n)_0,$$

индуцирующее изоморфизм в фундаментальных группах и в когомологиях $\mathrm{mod}\, n$.

Если наше предположение правильно, то проконечное пополнение связывает бесконечную симметрическую группу со стабильными гомотопическими группами сфер.

(vi) Предположим, что X имеет гомотопический тип комплексного алгебраического многообразия. При очень слабых ограничениях на X можно показать, что чеховские нервы алгебраических (этальных) покрытий X представляют собой комплексы, имеющие конечные гомотопические группы и аппроксимирующие когомологии $\hat{X}$ (Lubkin S., On a conjecture of Andre Weil, *Amer. J. of Math.*, **89**, No. 2 (1967), 443—548).

Работа Артина — Мазура (Etale Homotopy, Spinger Lecture Notes, 100 (1968)), относящаяся к когомологиям Гротендика, показывает, что $\hat{X}$ есть проективный предел по этальным покрытиям чеховских нервов этих покрытий.

Замечательным следствием этого алгебраического описания $\hat{X}$ является естественное действие группы Галуа в $\hat{X}$. Этому посвящена гл. 5.

---

[1]) Имеется в виду гомологическая эквивалентность $K(S_\infty,\ 1) \to \lim\ (\Omega^n S^n)_0$ — результат, по-видимому, впервые полученный Дайером и Лашофом (E. Dyer, R. K. Lashof, Homology of iterated loop spaces, *Amer. J. Math.*, 84 (1962), 35—88). — *Прим. ред.*

§ 3. l-ПРОКОНЕЧНОЕ ПОПОЛНЕНИЕ

Все сказанное сохраняет силу, если всюду заменить конечные группы l-конечными, где l, как и раньше, есть некоторое множество простых чисел, а l-конечная группа—это конечная группа, порядок которой является произведением простых чисел из l; например, если l есть множество всех простых чисел, то «l-конечная группа» — это просто «конечная группа».

Все конструкции и утверждения переносятся на этот случай без изменений. Например, аналог предложения 3.8 должен включать требование, чтобы группы $H^i(X; \mathbb{Z}/p)$ были конечны при $p \in l$ и все множества $\mathrm{Hom}(\pi_1 X,\ l\text{-конечная группа})$ были счетны, а его утверждение состоит в существовании изоморфизма

$$H^*(X; \mathbb{Z}/p) \cong H^*(\hat{X}_l; \mathbb{Z}/p), \qquad p \in l.$$

Далее, π^*-условия, аналогичные условиям предложения 3.13, влекут за собой изоморфизм

$$(\pi_i X)_l^{\wedge} \cong \pi_i (X_l^{\wedge}).$$

Опять-таки топология на функторе $[\ \ , \hat{X}_l]$ восстанавливается по гомотопическому типу $\hat{X}_l$, если $\pi_1 X = 0$ и группы $H^i(X; \mathbb{Z}/p)$ конечны при всех i и всех $p \in l$.

Новым обстоятельством является наличие в односвязном случае канонического расщепления на p-адические компоненты.

Предложение 3.16. *Если $(\pi_1 X)_l^{\wedge} = 0$, то существует естественное расщепление*

$$\hat{X}_l \cong \prod_{p \in l} \hat{X}_p$$

в смысле компактных представимых функторов. Далее, любое отображение

$$\hat{X}_l \xrightarrow{f} \hat{Y}_l$$

разлагается в произведение

$$\prod_{p \in l} (f_p^{\wedge} \colon \hat{X}_p \to \hat{Y}_p).$$

Доказательство. Представим произвольное пространство F с конечными гомотопическими группами как проективный предел (в смысле компактных представимых функторов) его коостовов

$$F = \varprojlim_{n} F^n$$

(первые n гомотопических групп пространства F^n совпадают с соответствующими гомотопическими группами пространства F, а остальные тривиальны).

Если $\pi_1 F = 0$, то нетрудно проверить (используя рассуждения постниковского типа), что F^n можно разложить в конечное произведение p-примарных компонент:

$$F^n = \prod_{p \in S_n} F_p^n.$$

Тогда

$$F = \varprojlim_{n} \Bigl(\prod_{p \in S_n} F_p^n \Bigr) = \prod_{p} \bigl(\varprojlim_{n} F_p^n \bigr) = \prod_{p} F_p,$$

а если гомотопические группы $\pi_i F$ l-конечны, то

$$F \cong \prod_{p \in l} F_p.$$

Так как

$$\hat{X}_l \cong \varprojlim_{f} F,$$

где предел берется по отображениям f пространства X во всевозможные пространства F с l-конечными гомотопическими группами, то

$$\hat{X}_l \cong \varprojlim_{f} \prod_{p \in l} F_p \cong \prod_{p \in l} \varprojlim_{f} F_p \cong \prod_{p \in l} \hat{X}_p.$$

Напомним, что топология в $[\ \ , F]$ определяется канонически, поэтому мы можем по желанию ее то вводить, то отбрасывать. Это замечание проясняет предыдущие, несколько формальные рассуждения.

Последнее равенство

$$\varprojlim_{f} F_p \cong \hat{X}_p$$

использует расщепление на уровне отображений

$$(F \to F') = \prod_{p \in l} (F_p \xrightarrow{f_p} F'_p).$$

Наличие этого расщепления вытекает из того (легко проверяемого с помощью теории препятствий) факта, что при $p \neq q$ любое отображение

$$F_p \to F'_q$$

гомотопно постоянному отображению. Последнее обобщается (опять-таки с помощью теории препятствий) до следующего утверждения: при $p \neq q$ любое отображение

$$\hat{X}_p \xrightarrow{f} \hat{Y}_q$$

гомотопно постоянному отображению.

Пример. Пусть $X = BO_2$ — классифицирующее пространство группы ортогональных матриц порядка 2, и пусть l есть множество всех простых нечетных чисел. Тогда:

(i) $\pi_1 \hat{X}_l = 0$;

(ii) при нечетном простом p $H^*(\hat{X}_l; \mathbb{Z}/p) = \mathbb{Z}/p[x_4]$. Следовательно,

(iii) $\Omega \hat{X}_l \cong \hat{S}^3_l$.

Таким образом, две нетривиальные гомотопические группы пространства O_2 превращаются при пополнении в бесконечное множество ненулевых гомотопических групп пространства S^3_l.

Точнее,

$$(BO_2)\hat{}_l \cong \prod_{\substack{\text{нечетные} \\ \text{простые числа}}} (BO_2)\hat{}_p$$

и для $(BO_2)\hat{}_p$

$$\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3,\ \pi_4,\ \pi_5,\ \ldots,\ \pi_{2p},\ \pi_{2p+1},\ \ldots \cong$$
$$\cong 0,\ 0,\ 0,\ \hat{\mathbb{Z}}_p,\ 0,\ \ldots,\ 0\ ,\ \mathbb{Z}/p\ ,\ \ldots .$$

В гл. 4 мы более подробно обоснуем равенство (ii).

Формальное пополнение. Теперь мы опишем конструкцию, которая переносит в категорию гомотопических типов операцию

$$\{\text{рациональные числа}\} \xrightarrow{\otimes \hat{Z}_l} \{l\text{-адические числа}\}.$$

Предположим, что X — счетный комплекс [1]). Тогда X можно представить как объединение конечных подкомплексов:

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots \subseteq X_n \subseteq \ldots \subseteq X.$$

Определение. *Формальное l-пополнение $\bar{X}_l$* определяется равенством

$$\bar{X}_l = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n)_l^{\hat{}},$$

где в правой части стоит бесконечный телескоп, составленный из l-проконечных пополнений конечных подкомплексов X_n.

Заметим, что $\bar{X}_l$ есть CW-комплекс и что на функторе

$$[\ \ , \bar{X}_l]$$

задана *частичная топология*: если Y — *конечный* комплекс, то множество

$$[Y, \bar{X}_l] \cong \varinjlim\, [Y, (X_n)_l^{\hat{}}]^{2)} \cong \varinjlim \{\text{проконечные пространства}\}$$

обладает топологией индуктивного предела.

Предложение 3.17. *Гомотопический тип комплекса $\bar{X}_l$ и частичная топология на функторе*

$$[\ \ , \bar{X}_l]$$

зависят только от гомотопического типа комплекса X.

---

[1]) Условие счетности не является необходимым: телескопическую конструкцию можно провести и для высших кардиналов.

[2]) См. доказательство предложения 3.17.

Доказательство. Пусть $\{X'_j\}$ — другое представление X в виде объединения конечных подкомплексов. Тогда существует система отображений

$$X_i \to X'_{j(i)},$$
$$X'_j \to X_{i(j)},$$

так как по определению CW-топологии образ любого отображения компактного пространства в X содержится в X_i (X'_j) при некотором i (j). Композиции

$$X'_j \to X_{i(j)} \to X'_{j(i(j))},$$
$$X_i \to X'_{j(i)} \to X_{i(j(i))}$$

совпадают с естественными вложениями. Поэтому возникающие отображения

$$\bigcup \hat{X}_i \rightleftarrows \bigcup \hat{X}'_j,$$

$$\varinjlim_i [Y, \hat{X}_i] \rightleftarrows \varinjlim_j [Y, \hat{X}'_j] \quad (Y \text{ — конечный комплекс})$$

взаимно обратны, и во второй строке отображения непрерывны. Предложение доказано.

Аналогичное рассуждение, использующее клеточные отображения, показывает, что фильтрация гомотопически эквивалентного пространства X' приводит к тому же самому результату. Более того, в действительности формальное пополнение есть функториальная конструкция в гомотопической категории.

Гомотопические группы пространства $\bar{X}_l$ являются индуктивными пределами проконечных групп. При этом отображения, составляющие индуктивную систему, являются непрерывными $\hat{\mathbb{Z}}_l$-гомоморфизмами. Поэтому группы $\pi_i \bar{X}_l$ являются топологическими $\hat{\mathbb{Z}}_l$-модулями. С другой стороны, группы $\pi_i X \otimes \hat{\mathbb{Z}}_l$ тоже являются топологическими $\hat{\mathbb{Z}}_l$-модулями (топология в группах $\pi_i X \otimes \hat{\mathbb{Z}}_l$ определяется как топология индуктивного предела:

$$\pi_i X \otimes \hat{\mathbb{Z}}_l \cong \varinjlim_{\substack{\text{конечно порожденные} \\ \text{подгруппы } H \subseteq \pi_i X}} \hat{H}_l \;).$$

П р е д л о ж е н и е 3.18. *Если пространство X односвязно, то существует естественный изоморфизм*

$$\pi_i \overline{X}_l \cong \pi_i X \otimes \hat{\mathbb{Z}}_l$$

топологических $\hat{\mathbb{Z}}_l$-модулей.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим X в виде объединения конечных односвязных подкомплексов $\{X^i\}$. Тогда

$\pi_j \overline{X}_l \cong \varinjlim_i \pi_j \hat{X}^i_l$	(так как сфера S^j компактна)
$\cong \varinjlim_i (\pi_j X^i)^\wedge_l$	(так как $\pi_1 X^i = 0$ и X^i — конечный комплекс; см. предложение 3.14)
$\cong \varinjlim_i ((\pi_j X^i) \otimes \hat{\mathbb{Z}}_l)$	(так как группы $\pi_j X^i$ конечно порождены)
$\cong (\varinjlim_i \pi_j X^i) \otimes \hat{\mathbb{Z}}_l$	(так как тензорное перемножение перестановочно со взятием индуктивного предела)
$\cong (\pi_j X) \otimes \hat{\mathbb{Z}}_l$	(опять-таки вследствие компактности сферы S^j),

причем все изоморфизмы являются топологическими $\hat{\mathbb{Z}}_l$-изоморфизмами.

§ 4. АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КВАДРАТ В ГОМОТОПИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

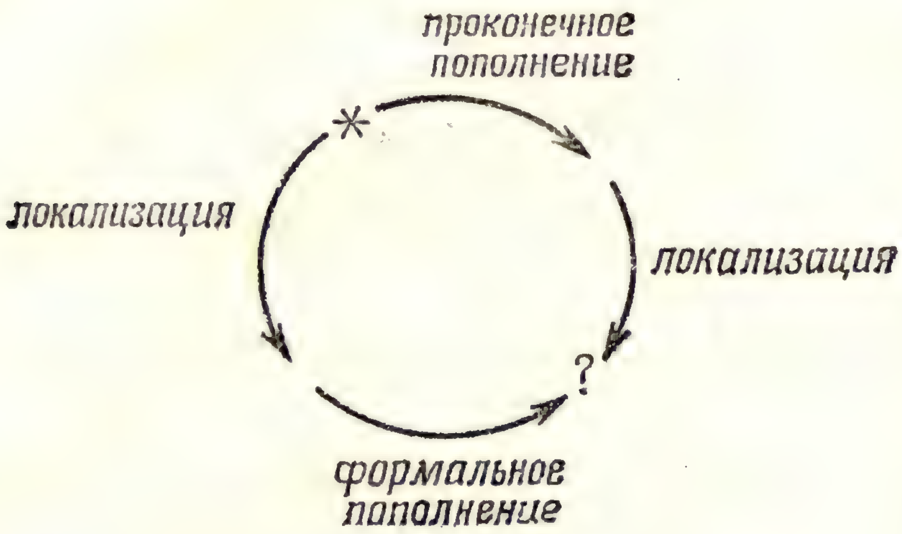
Мы рассмотрим теперь гомотопический аналог арифметического квадрата:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \rightarrow & \prod_p \hat{\mathbb{Z}}_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Q} & \rightarrow & \mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}} \end{array}$$

Мы говорим, что X есть *геометрический* гомотопический тип, если X гомотопически эквивалентно CW-ком-

плексу, у которого при каждом i есть лишь конечное число i-мерных клеток.

Рассмотрим диаграмму



и предположим на время, что X односвязно.

Проконечное пополнение $\hat{X}$ комплекса X является CW-комплексом с компактной топологией на функторе

$$[\ \ ,\hat{X}].$$

Как мы видели, в случае, когда X есть односвязный геометрический комплекс, топология восстанавливается по гомотопическому типу комплекса $\hat{X}$; при этом гомотопические группы комплекса $\hat{X}$ являются $\hat{\mathbb{Z}}$-модулями:

$$\pi_i\hat{X} \cong (\pi_i X)\hat{}\,.$$

Локализация X в нуле, X_0, представляет собой счетный комплекс, гомотопические группы которого являются конечномерными векторными $\mathbb{Q}$-пространствами:

$$\pi_i X_0 \cong \pi_i X \otimes \mathbb{Q}.$$

Локализация в нуле комплекса $\hat{X}$ является CW-комплексом, наделенным отображением

$$\hat{X} \xrightarrow{\text{локализация}} (\hat{X})_0,$$

причем имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\pi_i\widehat{X} \arrow[r, "\text{локализация}"] \arrow[dr, "x \mapsto x \otimes 1"'] & \pi_i(\widehat{X})_0 \arrow[d, "\cong"] \\
& (\pi_i\widehat{X}) \otimes \mathbb{Q}
\end{tikzcd}$$

(вертикальный изоморфизм однозначно определяется условием коммутативности). Следовательно, группы $\pi_i(\widehat{X})_0$ обладают естественной структурой $\widehat{\mathbb{Z}}$-модулей и естественной топологией, определяемыми равенством

$$\pi_i\widehat{X} \otimes \mathbb{Q} \cong \varinjlim_n (\pi_i\widehat{X} \xrightarrow{\cdot n} \pi_i\widehat{X}).$$

Формальное пополнение комплекса X_0 определено, так как X_0 — счетный комплекс. Он определяет CW-комплекс $(X_0)^-$ с частичной топологией на функторе

$$[\ \ , (X_0)^-].$$

Гомотопические группы комплекса $(X_0)^-$ являются, следовательно, топологическими $\widehat{\mathbb{Z}}$-модулями, и имеется канонический топологический $\widehat{\mathbb{Z}}$-изоморфизм

$$\pi_i(X_0)^- \cong (\pi_i X_0) \otimes \widehat{\mathbb{Z}}.$$

Предложение 3.19. *Пусть X — односвязный геометрический комплекс. Тогда существует естественная гомотопическая эквивалентность между $(X_0)^-$ и $(\widehat{X}_0)$, причем индуцированный изоморфизм гомотопических групп сохраняет структуру модулей над кольцом «конечных аделей» $\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}$.*

Доказательство. Представим X в виде объединения возрастающего семейства его конечных односвязных подкомплексов $\{X^i\}$. Тогда естественное отображение

$$\overline{X} = \varinjlim_i (\widehat{X}^i) \to \widehat{X}$$

является гомотопической эквивалентностью ($\varinjlim$ означает бесконечный телескоп). Действительно, из условий, налагаемых на X, следует, что

$$\pi_i\bar{X} \cong \pi_i X \otimes \hat{\mathbb{Z}} \cong (\pi_i X)^{\wedge} \cong \pi_i \hat{X}.$$

Применив функтор формального пополнения к отображению

$$X \xrightarrow{l} X_0,$$

мы получим отображение

$$\bar{X} \xrightarrow{l^-} (X_0)^-,$$

индуцирующее следующий $\hat{\mathbb{Z}}$-гомоморфизм гомотопических групп отображений:

$$\begin{tikzcd} \pi_i\bar{X} \arrow[r, "l^-"] \arrow[d, equal] & \pi_i (X_0)^- \arrow[d, equal, "\hat{\mathbb{Z}}\text{-изоморфизм}"] \\ \pi_i X \otimes \hat{\mathbb{Z}} \arrow[r, "l \otimes \mathrm{id}\, \hat{\mathbb{Z}}"] & \pi_i X_0 \otimes \hat{\mathbb{Z}} \end{tikzcd}$$

Но l локализует гомотопические группы:

$$\begin{tikzcd} \pi_i X \arrow[r, "l"] \arrow[dr, "x \mapsto x \otimes 1"'] & \pi_i X_0 \arrow[d, "\cong"] \\ & \pi_i X \otimes \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

Поэтому композиция l'

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[rr, "l'"] \arrow[dr, "\cong"'] & & (X_0)^- \\ & \bar{X} \arrow[ur, "l^-"'] & \end{tikzcd}$$

индуцирует в гомотопических группах отображение, которое можно включить в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \pi_i\hat{X} \arrow[r] \arrow[dr, "x \mapsto x\otimes 1"'] & \pi_i (X_0)^- \arrow[d, equal, "\hat{\mathbb{Z}}\text{-изоморфизм}"] \\ & \pi_i\hat{X} \otimes \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

Следовательно, $(X_0)^-$ действительно является локализацией в нуле комплекса $\hat{X}$, причем группа $\hat{\mathbb{Z}}$ согласованно действует в гомотопических группах этих комплексов. Таким образом, гомотопические типы комплексов $(X_0)^-$, $(\hat{X})_0$ и структуры $\hat{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{Q}$-модулей в их гомотопических группах совпадают.

Обозначим через X_A гомотопический тип комплекса $(X_0)^-$ (или $(\hat{X})_0$) и назовем его *конечноадельным гомотопическим типом комплекса* X. Гомотопические группы комплекса X_A являются модулями над кольцом $A=\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}}$ конечных аделей. Предложение 3.19 позволяет построить арифметический квадрат, отвечающий односвязному «геометрическому» гомотопическому типу X:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{проконечное пополнение}} & \hat{X}=\prod\limits_p \begin{pmatrix} p\text{-адическое} \\ \text{пополнение } X \end{pmatrix} \\ {\scriptstyle\text{локализация}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\text{локализация}} \\ \begin{array}{c}\text{«рациональный}\\ \text{тип } X\text{»}\end{array}=X_0 & \xrightarrow{\text{формальное пополнение}} & X_A \text{ «адельный тип } X\text{»} \end{array}$$

Эта диаграмма индуцирует на уровне гомотопических групп диаграмму

$$\pi_* X\otimes\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \rightarrow & \hat{\mathbb{Z}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Q} & \rightarrow & \hat{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{Q} \end{array}\right\}$$

Этим доказано

Предложение 3.20. *Арифметический квадрат является «расслоенным квадратом». Подробнее, если превратить отображения*

$$\hat{X}\rightarrow X_A,\quad X_0\rightarrow X_A$$

в расслоения, то отображения

$$X\xrightarrow{\text{локализация}} X_0,$$

$$X\xrightarrow{\text{проконечное пополнение}}\hat{X}$$

будут эквивалентны индуцированным расслоениям над X_0, $\widehat{X}$.

Следствие 3.21. *Гомотопический тип односвязного геометрического комплекса* X *определяется его рациональным гомотопическим типом* X_0, *проконечным пополнением* $\widehat{X}$ *и эквивалентностью*

$$(X_0)^{-} \overset{e}{\cong} (\widehat{X}_0) \ (= \text{адельный тип } X),$$

причем e *индуцирует в гомотопических группах* $\widehat{\mathbb{Z}}$-*изоморфизм.*

Далее, другая тройка

$$(Y_0,\ \widehat{Y},\ f\colon\ (Y_0)^{-} \to (\widehat{Y})_0)$$

определяет тот же гомотопический тип X *в том и только в том случае, когда существуют такие гомотопические эквивалентности*

$$X_0 \xrightarrow{u} Y_0, \quad \widehat{X} \xrightarrow{v} \widehat{Y},$$

что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(X_0)^{-} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "u^{-}"] & (\widehat{X})_0 \arrow[d, "v_0"] \\
(Y_0)^{-} \arrow[r, "f"] & (\widehat{Y})_0
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

При таком описании гомотопического типа X надо учитывать, что существует разложение гомотопического типа $\widehat{X}$:

$$\widehat{X} = \prod_p \widehat{X}_p$$

(точнее, соответствующего компактного представимого функтора), а также соответствующее разложение отображения v

$$v = \prod_p \hat{v}_p.$$

Таким образом, мы видим, что односвязные геометрические пространства X разлагаются в бесконечное множество p-адических кусков и один рациональный

кусок. Проблема склеивания этих кусков — это проблема, относящаяся к рациональным гомотопическим типам с дополнительной структурой $\hat{\mathbb{Z}}$-модулей в их гомотопических группах. В этой связи мы укажем на аналог конструкции адельного пространства, содержащейся в статье А. Вейля «Адели и алгебраические группы» (сб. *Математика*, 8 : 4 (1964)).

Пусть S — произвольное конечное множество простых чисел. Положим

$$\hat{X}_S = \Big(\prod_{p \in S} (\hat{X}_p)_0\Big) \times \Big(\prod_{p \notin S} \hat{X}_p\Big).$$

Второй множитель строится, как обычно, с помощью компактной топологии в функторах $[\ ,\ \hat{X}_p]$.

Множества $\{S\}$ и соответственно гомотопические типы $\{X_S\}$ образуют индуктивную систему.

Предложение 3.22. *«Адельный тип» комплекса X эквивалентен индуктивному пределу пространств $\hat{X}_S$* [1]). *Эквивалентность сохраняет структуру $\hat{\mathbb{Z}}$-модулей в гомотопических группах.*

Доказательство. Используя теорию препятствий, легко проверить, что для любых комплексов Y, Y' существует единственное отображение f, делающее диаграмму

$$\begin{tikzcd}
Y \times Y' \arrow[d, "\text{локализация} \times \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\text{локализация}"] & \\
Y_0 \times Y' \arrow[r, dotted, "f"'] & (Y \times Y')_0
\end{tikzcd}$$

(гомотопически) коммутативной. Поэтому имеются канонические отображения

$$\hat{X}_S \to X_A,$$

[1]) Как всегда, под индуктивным пределом понимается бесконечный телескоп, построенный по конфинальному множеству в $\{S\}$.

в свою очередь индуцирующие отображение

$$\varinjlim_S \hat{X}_S \xrightarrow{A} X_A.$$

Для проверки того, что A индуцирует $\hat{\mathbb{Z}}$-изоморфизм гомотопических групп, достаточно заметить следующее: существует естественный изоморфизм

$$\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}}\cong\varinjlim_S\left(\prod_{p\in S}\mathbb{Q}_p\right)\times\left(\prod_{p\notin S}\hat{\mathbb{Z}}_p\right),$$

т. е. кольцо конечных аделей является ограниченным произведением колец p-адических чисел.

Замечание 1. Это предложение может рассматриваться как описание отображения локализации для проконечного гомотопического типа X,

$$\hat{X}\to(\hat{X})_0.$$

Замечание 2. Пусть теперь Y — односвязное пространство, гомотопические группы которого являются конечно порожденными $\hat{\mathbb{Z}}$-модулями. Возникает вопрос, существует ли такой односвязный геометрический комплекс X, что $Y=\hat{X}$.

Прежде всего локализуем Y в нуле. Это можно сделать через индуктивный предельный переход, используя отдельные p-адические компоненты Y, как в предложении 3.22 $\left(\text{поскольку } Y\cong\hat{Y}\cong\prod\limits_p\hat{Y}_p\right)$. В результате мы получим «адельный тип» X_A искомого комплекса X, если, конечно, этот комплекс X существует. Очевидно, X_A есть рациональное пространство — его гомотопические группы являются векторными $\mathbb{Q}$-пространствами (несчетной размерности). С другой стороны, эти гомотопические группы являются и $\hat{\mathbb{Z}}$-модулями. Таким образом, вопрос о нахождении X сводится к следующей задаче рациональной гомотопической теории: найти подходящее «вложение» рационального пространства (с конечномерными группами гомотопий)

в X_A. Точнее, надо построить отображение $c\colon X_0 \to X_A$, индуцирующее $\hat{\mathbb{Z}}$-изоморфизмы

$$\pi_i X_0 \otimes \hat{\mathbb{Z}} \cong \pi_i X_A.$$

Тогда искомое пространство X можно определить как расслоенное произведение

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow l \\ X_0 & \xrightarrow{c} & X_A \end{array}$$

Например, в случае, когда X есть комплексное алгебраическое многообразие, видно, какой дополнительной информацией мы должны располагать, чтобы восстановить гомотопический тип X по этальному гомотопическому типу X, т. е. по $\hat{X}$, — нужно иметь подходящее вложение рационального типа X_0 пространства X в локализованный этальный гомотопический тип $(\hat{X})_0$.

Замечание 3. Нетрудно проверить, что любое односвязное пространство Y, гомотопические группы которого являются конечномерными векторными $\mathbb{Q}$-пространствами, получается при локализации некоторого геометрического пространства X.

Построение проводится индукцией по «локальным клеткам» пространства Y. Точнее говоря, представим Y как объединение $\bigcup Y_n$, где Y_n есть кослой некоторого отображения $a\colon S_0^k \to Y_{n-1}$, и предположим, что уже построен геометрический комплекс X_{n-1} с $(X_{n-1})_0 \cong Y_{n-1}$. Надлежащим образом выбирая локализацию $S^k \to S_0^k$, мы можем найти $a'\colon S^k \to X_{n-1}$, такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S^k & \xrightarrow{a'} & X_{n-1} \\ \text{локализация} \downarrow & & \downarrow \text{локализация} \\ S_0^k & \longrightarrow & Y_{n-1} \end{array}$$

будет коммутативна. (Действительно, для этого достаточно взять такую локализацию $l\colon S^k \to S_0^k$, чтобы

гомотопический класс сфероида

$$S^k \xrightarrow{l} S_0^k \xrightarrow{a} Y_{n-1}$$

представлялся в виде $(1/N)a'$ с

$$a' \in \operatorname{Im}[\pi_k X_{n-1} \to \pi_k Y_{n-1}];$$

тогда наша диаграмма будет коммутативной для локализации $S^k \xrightarrow{l} S_0^k \xrightarrow{\cdot N} S_0^k$.) Определим теперь X_n как кослой отображения a'; очевидно, $(X_n)_0 \cong Y_n$.

Аналогичное построение проходит и в случае, когда мы рассматриваем локализации относительно произвольного множества l простых чисел.

Было бы интересно проанализировать подробнее препятствие к проведению такого построения в проконечном случае.

Локальный арифметический квадрат. Сказанное сохраняет силу для локализации X в произвольном множестве l. Расслоенный квадрат групп

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{Z}_l & \to & \hat{\mathbb{Z}}_l \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}_l = \{l\text{-адические числа}\} \end{array}$$

где l — непустое множество простых чисел, имеет гомотопический аналог

$$\begin{array}{ccl} X_l & \to & \hat{X}_l \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_0 & \to & X_{A_l} = (\hat{X}_l)_0 = (X_0)_l^- \end{array}$$

свойства которого близки к свойствам квадрата из предложения 3.19.

Если $l = \{p\}$, то квадрат превращается в диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X_p & \to & \hat{X}_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_0 & \to & X_{\mathbb{Q}_p} \end{array}$$

в которой

$$X_{\mathbb{Q}_p} = (\hat{X}_p)_0 = (X_0)_p^-$$

есть форма комплекса X над полем p-адических чисел в p-адическом пополнении поля $\mathbb{Q}$.

Естественно задать вопрос, что такое комплекс $X_{\mathbb{R}}$, где $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел (вещественное пополнение поля $\mathbb{Q}$), и как его включить в рассматриваемую схему. Например, «конечный адельный тип X_A» должен при этом замениться «полным адельным типом»

$$X_A \times X_{\mathbb{R}}.$$

Тогда слой естественного отображения

$$X_0 \to X_A \times X_{\mathbb{R}}$$

будет иметь компактные гомотопические группы, и это отображение должно быть удобным для изучения.

Если l есть дополнение к простому числу $\{p\}$, то пространства типа $\widehat{X}_l$ возникают при изучении этального гомотопического типа алгебраических многообразий над полем характеристики p. Возможно, в этих случаях существует препятствие к заполнению диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & & \widehat{X}_l \\ & & \downarrow \\ X_0 & \cdots\cdots\to & (\widehat{X}_l)_0, \end{array}$$

где X_0 подчинено условию конечномерности над $\mathbb{Q}$ и $\pi_*(\widehat{X}_l)_0 \cong \pi_* X_0 \otimes \widehat{\mathbb{Z}}_l$ над $\widehat{\mathbb{Z}}_l$. Тогда оно является препятствием к поднятию многообразия в нулевую характеристику.

Глава 4

СФЕРИЧЕСКИЕ РАССЛОЕНИЯ

Мы обсудим теорию послойных гомотопических классов расслоений, слои которых являются l-локальными или l-адическими сферами. Эти теории связаны между собой в соответствии с предложением 3.20 и обладают интересными симметриями.

Определение. Расслоение Гуревича [1]

$$\xi\colon S \to E \to B,$$

слоем которого служит локальная сфера $S_l^{n-1} (n > 1)$, называется *локальным сферическим расслоением*. *Ориентацией* расслоения называется класс когомологий

$$U_\xi \in H^n(E \to B;\ \mathbb{Z}_l)\ ^{2)},$$

сужение которого порождает группу

$$H^n(S_l^{n-1} \to *;\ \mathbb{Z}_l) \cong \mathbb{Z}_l.$$

Если l — множество всех простых чисел, то мы получаем более или менее знакомую теорию:

(i) Множество классов послойно гомотопически эквивалентных S^{n-1}-расслоений над X совпадает с множеством гомотопических классов отображений

$$X \to BG_n.$$

(ii) BG_n есть классифицирующее пространство ассоциативного H-пространства

$$G_n = \{S^{n-1} \xrightarrow{f} S^{n-1} \mid \deg f \in \{\pm 1\} = \mathbb{Z}^*\}$$

---

[1]) Отображение $E \to B$ называется расслоением Гуревича, если оно обладает свойством накрывающей гомотопии для отображений *произвольного* пространства в B.

[2]) $H^n(E \to B)$ обозначает n-ю когомологическую группу пары (цилиндр отображения $E \to B$, E).

(H-структура определяется композицией), т. е. ΩBG_n изоморфно G_n как гомотопически ассоциативное H-пространство (Stasheff J. D., A classification theorem for fibre spaces, *Topology*, **2**, № 3(1963), 239—246).

(iii) Ориентированная теория классифицируется[1]) множеством $[X, BSG_n]$, где BSG_n можно описать двумя эквивалентными способами: (a) как классифицирующее пространство для компоненты SG_n H-пространства G_n, содержащей тождественное отображение; (b) как универсальную (двулистную) накрывающую над BG_n.

(iv) Инволюция в ориентированной теории, отвечающая замене ориентации, соответствует действию группы $\pi_1 BG_n$ на BSG_n.

(v) Естественные вложения $G_n \to G_{n+1}$, $BG_n \to BG_{n+1}$ соответствуют операции послойной надстройки; объединение $BG = \bigcup_{n=1}^{\infty} BG_n$ является классифицирующим пространством для стабильной теории.

Стабильная теория для конечномерных комплексов есть просто индуктивный предел конечномерных теорий относительно послойной надстройки. Этот индуктивный предел стабилизируется на конечном шаге: поэтому можно считать, что BG классифицирует сферические расслоения, у которых слои имеют много бо̀льшие размерности, чем базы.

Для бесконечных комплексов X гомотопический класс отображения X в BG есть элемент проективного предела множеств гомотопических классов отображений конечномерных остовов X. Такое описание возможно благодаря конечности гомотопических групп пространства BG[2]) (см. гл. 3). С другой стороны, эле-

[1]) Относительно послойных гомотопических эквивалентностей, сохраняющих ориентацию.

[2]) Напомним, что естественное отображение

$$\pi(X, Y) \to \varprojlim (n\text{-й остов } X, Y)$$

не всегда является обратимым (см. Адамс Дж., Уокер Г., Пример в теории гомотопий, сб. *Математика*, **9**: 1 (1965), 51—53). Условия его обратимости исследованы, например, в статье Бухштабера В. и Мищенко А., Элементы бесконечной фильтрации в K-теории, *ДАН СССР*, **178**, № 6 (1968), 1234—1237. — *Прим. ред.*

мент этого проективного предела можно интерпретировать как возрастающее объединение сферических расслоений возрастающей размерности над остовами X.

Инволюция в «стабильной теории» тривиальна [1]), а потому имеется каноническое расщепление

$$BG \cong K(\mathbb{Z}/2, 1) \times BSG.$$

При некоторых n пространства BG_n и BSG_n можно описать явно:

$$BG_1 = \mathbb{R}P^\infty, \quad BSG_1 = S^\infty \cong *,$$

$$BG_2 = BO_2, \quad BSG_2 = \mathbb{C}P^\infty \cong BSO_2.$$

Дальнейшие пространства BG_n не известны, хотя (конечные) гомотопические группы пространства $BG = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} BG_n$ совпадают со стабильными гомотопическими группами сферы и в этом качестве много изучались:

$$\pi_{i+1} BG = \varinjlim \pi_{i+k}(S^k).$$

Явная процедура построения классифицирующего пространства, предложенная Сташеффом, непосредственно к S_l^{n-1}-расслоениям не применима, так как S_l^n есть бесконечный (хотя и локально компактный) комплекс (если, конечно, l не есть множество всех простых чисел).

Если же мы рассмотрим l-адические сферические расслоения, т. е. расслоения Гуревича со слоем $\hat{S}_l^{n-1}$, то ситуация станет еще хуже: комплекс $\hat{S}_l^{n-1}$ не счетен и потому даже не локально компактен.

Однако можно использовать теорию квазирасслоений Дольда [2]) и получить абстрактную теорему представимости для расслоений с произвольным слоем.

---

[1]) Это простейший случай феномена Адамса.

[2]) См. Дольд А., Полуточные гомотопические функторы, сб. *Математика*, **9**:3 (1970), 3—93.

Теорема 4.1 (А. Дольд). *Существуют такие связные CW-комплексы B_l^n и $\widehat{B}_l^n$, что*

$$\left\{\begin{matrix}\text{теория}\\ S_l^{n-1}\text{-расслоений}\end{matrix}\right\} \cong [\ \ ,B_l^n],$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{теория}\\ \widehat{S}_l^{n-1}\text{-расслоений}\end{matrix}\right\} \cong [\ \ ,\widehat{B}_l^n],$$

где [,] *обозначает множество свободных (не базированных) гомотопических классов.*

В действительности теория Дольда дает как раз базированный изоморфизм:

$$\left\{\begin{matrix}\text{базированные}\\ \text{расслоения}\end{matrix}\right\} \cong [\ \ ,B]_b;$$

чтобы получить нашу свободную формулировку, нужно разбить каждое множество на орбиты группы $\pi_1 B$.

Основная теорема.

Теорема 4.2. (i) *Имеется каноническая диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\left\{\begin{matrix}\text{теория}\\ S^{n-1}\text{-расслоений}\end{matrix}\right\} \arrow[r, "\substack{\text{послойная}\\ \text{локализация}}"] \arrow[dr, "\substack{\text{послойное}\\ \text{пополнение}}"'] & \left\{\begin{matrix}\text{теория}\\ S_l^{n-1}\text{-расслоений}\end{matrix}\right\} \arrow[d, "\substack{\text{послойное}\\ \text{пополнение}}"] \\
 & \left\{\begin{matrix}\text{теория}\\ \widehat{S}_l^{n-1}\text{-расслоений}\end{matrix}\right\}
\end{tikzcd}$$

отвечающая диаграмме классифицирующих пространств:

$$\begin{tikzcd}
BG_n \arrow[r, "l"] \arrow[dr, "c"'] & B_l^n \arrow[d, "c"] \\
 & \widehat{B}_l^n
\end{tikzcd}$$

(ii) *Соответствующая диаграмма фундаментальных групп есть диаграмма единиц:*

$$\begin{tikzcd} \{\pm 1\} = \mathbb{Z}^* \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{Z}_l^* \arrow[d] \\ & \hat{\mathbb{Z}}_l^* \end{tikzcd}$$

(iii) *Соответствующая диаграмма универсальных накрывающих канонически изоморфна диаграмме*

$$\begin{tikzcd} BSG_n \arrow[r, "\text{локализация в } l"] \arrow[dr, "l\text{-адическое пополнение}"'] & (BSG_n)_l \arrow[d, "\text{пополнение}"] \\ & (BSG_n)\hat{}_l \end{tikzcd}$$

Последняя диаграмма является классифицирующей для диаграммы ориентированных теорий; действие фундаментальной группы на накрывающих пространствах соответствует действию групп единиц в ориентированных теориях, определяемому формулой

$$(\xi, U_\xi) \longmapsto (\xi, \alpha U_\xi),$$

где ξ — *сферическое расслоение* $E \to B$; U_ξ — *ориентация, т. е. элемент группы* $H^n(E \to B; R)$; α — *единица кольца* $R = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_l$ *или* $\hat{\mathbb{Z}}_l$.

Доказательство теоремы 4.2 довольно длинно, и мы отложим его до конца главы. Однако мы сразу сформулируем результат, который получится в процессе доказательства.

Следствие 1. *Имеются естественные изоморфизмы*

$$\pi_0 \operatorname{Aut} S_l^{n-1} \cong \mathbb{Z}_l^*,$$
$$(\operatorname{Aut} S_l^{n-1})_1 \cong (SG_n)_l,$$
$$\pi_0 \operatorname{Aut} \hat{S}_l^{n-1} \cong \hat{\mathbb{Z}}_l^*,$$
$$(\operatorname{Aut} \hat{S}_l^{n-1})_1 \cong (SG_n)_l^{\wedge}.$$

Здесь через $\operatorname{Aut} X$ обозначается сингулярный комплекс автоморфизмов X (симплекс σ — это гомотопическая эквивалентность $\sigma \times X \to X$); индекс «1» обозначает компоненту тождественного отображения.

Группа Галуа. Другое следствие основной теоремы, которое заслуживает выделения, относится к симметриям в пространствах $(BSG_n)_l$ и $(BSG_n)_l^{\wedge}$.

Следствие 2. *Поскольку указанные пространства классифицируют ориентированные теории, они обладают согласованными $\mathbb{Z}_l^*$- и $\hat{\mathbb{Z}}_l^*$-симметриями.*

Если, например, $l = \{p\}$, то

$$\mathbb{Z}_l^* \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \{\text{свободная абелева группа, порожденная простыми числами, отличными от } p\},$$

$$\hat{\mathbb{Z}}_l^* \cong \left\{ \begin{matrix} \mathbb{Z}/p-1 \oplus \hat{\mathbb{Z}}_p & \text{при} \quad p > 2, \\ \mathbb{Z}/2 \oplus \hat{\mathbb{Z}}_2 & \text{при} \quad p = 2. \end{matrix} \right\}.$$

Мы видим, что после пополнения существенно различные симметрии в локальной теории срастаются (топологически) в компактную группу с одной (топологической) образующей. Ниже мы покажем (следствие 3), что все гомотопические группы пространства BSG_n конечны, за исключением одной:

$$\pi_n BSG_n = \mathbb{Z} \oplus \{\text{кручение}\} \qquad \text{при четном } n,$$
$$\pi_{2n-2} BSG_n = \mathbb{Z} \oplus \{\text{кручение}\} \qquad \text{при нечетном } n.$$

Первые $n-2$ гомотопические группы пространства BSG_n (со 2-й по $(n-1)$-ю) конечны и совпадают с первыми $n-2$ стабильными гомотопическими группами

сфер[1]). Поэтому гомотопические группы пространства $(BSG_n)_l\hat{}$ представляют собой l-части этих групп плюс одна группа, изоморфная $\hat{\mathbb{Z}}_l$ (в размерности n или $2n-2$).

Группа единиц $\hat{\mathbb{Z}}_l^*$ тривиально действует на гомотопических группах малой размерности (стабильных), но нетривиально на высших группах. Например, если n четно, то группа $\hat{\mathbb{Z}}_l^*$ действует на группе

$$\pi_n\,(BSG_n)_l\hat{}\ /\text{кручение} \cong \hat{\mathbb{Z}}_l$$

посредством умножения.

---

[1]) Ссылка на следствие 3 здесь не вполне убедительна, поскольку оно, во-первых, не доказывается и, во-вторых, не покрывает перечисленных утверждений о гомотопических группах пространства BSG_n. Впрочем, все эти утверждения доказываются элементарными средствами. Прежде всего для любого i группа $\pi_i\,(BSG_n)$ изоморфна $\pi_{i-1}\,(SG_n)$ (это — следствие общего свойства классифицирующих пространств). Пространство же SG_n естественно расслаивается над S^{n-1} со слоем, гомотопически эквивалентным компоненте пространства $\Omega^{n-1}S^{n-1}$ кратных петель сферы. Гомотопическая последовательность этого расслоения, с учетом канонического изоморфизма $\pi_j\,(\Omega^{n-1}S^{n-1}) = \pi_{j+n-1}\,(S^{n-1})$, имеет вид

$$\ldots \to \pi_i\,(S^{n-1}) \xrightarrow{\gamma} \pi_{i+n-2}\,(S^{n-1}) \to \pi_{i-1}\,(SG_n) \to$$
$$\to \pi_{i-1}\,(S^{n-1}) \xrightarrow{\gamma} \pi_{i+n-3}\,(S^{n-1}),$$

и гомоморфизмы γ определяются умножением Уайтхеда на каноническую образующую группы $\pi_{n-1}\,(S^{n-1})$. Если $i < n-1$, то последовательность дает $\pi_{i-1}\,(SG_n) = \pi_{i+n-2}\,(S^{n-1}) = \pi_{i-1}^{\mathrm{stab}}\,(S^0)$ [и, таким образом, $\pi_i\,(BSG_n) = \pi_{i-1}^{\mathrm{stab}}\,(S^0)$]. Далее, если n четно, то гомотопические группы сферы S^{n-1}, за исключением $\pi_{n-1}\,(S^{n-1})$, конечны, и

$$\pi_{i-1}\,(SG_n)\,[=\pi_i\,(BSG_n)] = \begin{cases} \text{конечная группа при } i \neq n, \\ Z \oplus \text{конечная группа при } i = n. \end{cases}$$

Наконец, если n нечетно, то бесконечны (и имеют ранг 1) группы $\pi_{n-1}\,(S^{n-1})$ и $\pi_{2n-3}\,(S^{n-1})$, но гомоморфизм γ: $\pi_{n-1}\,(S^{n-1}) \to \pi_{2n-3}\,(S^{n-1})$ имеет конечное ядро, благодаря чему

$$\pi_{i-1}\,(SG_n)\,[=\pi_i\,(BSG_n)] = \begin{cases} \text{конечная группа при } i \neq 2n-2, \\ Z \oplus \text{конечная группа при } i = 2n-2. \end{cases}$$

— *Прим. ред.*

Действие группы $\widehat{\mathbb{Z}}_l^*$ на высших гомотопических группах измеряет эффект, производимый на гомотопические группы сфер отображением степени α. Его можно вычислить с точностью до присоединенности через произведение Уайтхеда и инвариант Хопфа. Оно представляется особенно интересным при $l=\{2\}$.

Рациональная теория. Если l пусто, то локальная теория становится «рациональной теорией». Используя расслоение

$$[(\Omega^{n-1}S^{n-1})_1 \to SG_n \to S^{n-1}],$$

локализованное в $l=\emptyset$, легко доказать

Следствие 3. *Ориентированные $S_\emptyset^{n-1}$-расслоения классифицируются*

(i) *«классом Эйлера» в* H^n (база; $\mathbb{Q}$) *при четном* n;

(ii) *«классом Хопфа» в* H^{2n-2} (база; $\mathbb{Q}$) *при нечетном* n.

Нетрудно также проверить эквивалентность последовательностей расслоений

$$\begin{array}{ccccccccccc}
[\ldots \to & SG_{2n} & \to & SG_{2n+1} & \to & SG_{2n+1}/SG_{2n} & \to & BSG_{2n} & \to & BSG_{2n+1} &]_\emptyset \\
 & \cong\downarrow & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \text{класс Эйлера}\downarrow & & \downarrow\text{класс Хопфа} & \\
\ldots \to & S_\emptyset^{2n-1} & \to & S_\emptyset^{4n-1} & \xrightarrow[\text{Уайтхеда}]{\text{квадрат}} & S_\emptyset^{2n} & \to & K(\mathbb{Q}, 2n) & \xrightarrow[\smile\text{-квадрат}]{} & K(\mathbb{Q}, 4n) &
\end{array}$$

Следствие 3 имеет «подкрученный аналог» для неориентируемых расслоений.

Стабильная рациональная теория тривиальна. Неориентируемая стабильная рациональная теория совпадает с теорией локальных $\mathbb{Q}$-систем коэффициентов, т. е. с $H^1(\ ;\mathbb{Q}^*)$.

Заметим, что первое утверждение следствия 3 (подкрученное или неподкрученное[1]) означает гомотопическую эквивалентность

$$S_\emptyset^{2n-1} \cong K(\mathbb{Q},\ 2n-1).$$

---

[1] Для доказательства полезно сравнить расслоения $SO_n \to SO_{n+1} \to S^n$ и $(\Omega^n S^n)_1 \to SG_{n+1} \to S^n$. — *Прим. ред.*

Группа единиц поля $\mathbb{Q}$,

$$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Z}/2 \oplus \{\text{свободная абелева группа, порожденная простыми числами}\},$$

действует в ориентированной рациональной теории естественным образом при четном n умножениями на квадраты при нечетном.

Стабильная теория.

Следствие 4. (i) *Для стабильных ориентированных теорий имеют место изоморфизмы*

$$\left\{\begin{matrix}\text{ориентированная}\\ \text{стабильная } l\text{-ло-}\\ \text{кальная теория}\end{matrix}\right\} \cong \left\{\begin{matrix}\text{ориентированная}\\ \text{стабильная } l\text{-ади-}\\ \text{ческая теория}\end{matrix}\right\} \cong$$
$$\cong \Big[\ \ ,\ \prod_{p \in l} (BSG)_p\Big].$$

(ii) *Неориентированная стабильная теория канонически изоморфна прямому произведению ориентированной стабильной теории на теорию локальных $\mathbb{Z}_l$- или $\hat{\mathbb{Z}}_l$-систем коэффициентов*:

$$\left\{\begin{matrix}\text{стабильная}\\ l\text{-локальная}\\ \text{теория}\end{matrix}\right\} \cong \Big[\ \ ,\ K(\mathbb{Z}_l^*, 1) \times \prod_{p \in l} (BSG)_p\Big],$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{стабильная}\\ l\text{-адическая}\\ \text{теория}\end{matrix}\right\} \cong \Big[\ \ ,\ K(\hat{\mathbb{Z}}_l^*, 1) \times \prod_{p \in l} (BSG)_p\Big].$$

(iii) *Группа Галуа тривиально действует в стабильной ориентированной теории.*

Доказательство. (i) Так как гомотопические группы пространства BSG конечны, существует каноническое расщепление

$$BSG \cong \prod_p (BSG)_p$$

пространства BSG на p-примарные компоненты. Ясно, что для конечномерных комплексов

$$\left[\ \ ,\ \prod_{p\in l}(BSG)_p\right]\cong[\ \ ,(BSG)_l]\cong[\ \ ,\varinjlim(BSG_n)_l]\cong$$

$$\cong\varinjlim\{\text{ориентированные } S_l^{n-1}\text{-теории}\}\cong$$

$$\cong\{\text{стабильная ориентированная локальная теория}\}.$$

С другой стороны, из описания рациональной структуры следует, что естественное отображение

$$\varinjlim_n\left((BSG_n)_l\to(BSG_n)_l^{\wedge}\right)$$

является изоморфизмом. Так как, по определению, стабильная ориентируемая l-адическая теория классифицируется пространством

$$\varinjlim_n(BSG_n)_l^{\wedge},$$

то первое утверждение следствия доказано.

(ii) Рассмотрим l-адический случай. Локальная система

$$\alpha\in H^1(\ \ ;\hat{\mathbb{Z}}_l^*)$$

определяет $\hat{S}_l^1$-расслоение α, так как группа единиц $\hat{\mathbb{Z}}_l^*$ действует на подходящем представителе гомотопического типа $\hat{S}_l^1$ посредством гомеоморфизмов (годится, например, пространство $K(\hat{\mathbb{Z}}_l, 1)$, построенное с помощью функториальной конструкции).

Согласно (i), любое стабильное ориентированное l-адическое расслоение можно представить l-локальным расслоением γ. Послойный джойн $\alpha*\gamma$ определяет l-адическое расслоение, так как

$$\hat{S}_l^1*S_l^{n-1}\cong\hat{S}_l^{n+1}.$$

Нетрудно проверить, используя такие же рассуждения, как при доказательстве теоремы 4.2, что эта конструкция определяет отображение

$$K(\hat{\mathbb{Z}}_l^*, 1)\times(BSG)_l\to\varinjlim_n\hat{B}_l^n,$$

индуцирующее изоморфизм в гомотопических группах.

Локальный случай разбирается аналогично. В действительности нет необходимости его рассматривать, так как можно априори показать (используя джойн Уитни), что стабильная локальная теория аддитивна.

(iii) Тривиальность действия группы Галуа сразу следует из (ii). Ее можно установить и непосредственно: в локальной теории действие группы Галуа тривиально, так как существуют автоморфизмы расслоения $S_l^1 * \gamma$, где $*$ — послойный джойн, а γ — локальное ориентированное расслоение, умножающее ориентацию на любую единицу кольца $\mathbb{Z}_l$; по соображениям непрерывности из этого следует, что действие проконечной группы $\hat{\mathbb{Z}}_l$ также тривиально.

Заметим, что утверждение (iii) следствия 4 является чисто «теоретико-гомотопическим» вариантом гипотезы Адамса.

Инерция внутреннего стабильного гомотопического типа. Сейчас мы обобщим эту чисто теоретико-гомотопическую гипотезу Адамса.

Пусть

$$B_0 \to \ldots \to B_n \xrightarrow{i} B_{n+1} \to \ldots$$

— последовательность пространств. Предположим, что каждое из этих пространств является базой сферического расслоения

$$S^{d_n} \to \gamma_n \to B_n,$$

причем размерности слоев строго возрастают и расслоения согласованы, т. е. существуют изоморфизмы

$$i^*\gamma_{n+1} \overset{f_n}{\cong} \gamma_n * S^{d_{n+1}-d_n}.$$

Мы изучим «стабильное расслоение»

$$B_\infty \xrightarrow{\gamma} BG,$$

где B_∞ есть бесконечный телескоп $\{B_n\}$, а γ строится из расслоений $\{\gamma_n\}$ и эквивалентностей $\{f_n\}$ [1]).

Основное предположение относительно этого «стабильного расслоения» γ заключается в том, что оно должно быть «внутренним» по отношению к фильтрации $\{B_n\}$ в B_∞. Иными словами, должны существовать сколь угодно большие номера n, такие, что сферическое расслоение γ_{n+1} сильно аппроксимируется отображением

$$B_n \to B_{n+1},$$

т. е. композиция

$$B_n \xrightarrow{\text{сечение}} i^*\gamma_{n+1} \xrightarrow{i^*} \gamma_{n+1}$$

является эквивалентностью над $d(n)$-м остовом, причем $d(n) - d_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Как нетрудно проверить, естественные стабильные расслоения:

«ортогональное»	$BO \to BG$,
«унитарное»	$BU \to BG$,
«симплектическое»	$BSp \to BG$,
«кусочно линейное»	$BPL \to BG$,
«топологическое»	$B\,\mathrm{Top} \to BG$,
«гомотопическое»	$BG \xrightarrow{\mathrm{id}} BG$

являются «внутренними» по отношению к естественным фильтрациям

$$\{BO_n\},\ \{BU_n\},\ \{BSp_n\},\ \{BPL_n\},\ \{B\,\mathrm{Top}_n\},\ \{BG_n\}.$$

Можно дать аналогичные определения для локальных и l-адических сферических расслоений. В ориентированном случае тогда возникнут отображения

$$B_\infty \to (BSG)_l \cong \prod_{p \in l} (BSG)_p.$$

[1]) Напомним, что, согласно результатам гл. 3, пространство BG представляет компактный функтор. Расслоения γ_n гомотопически однозначно определяют отображения $B_n \xrightarrow{\gamma_n} BG$ и γ есть соответствующий элемент проективного предела

$$\varprojlim\, [B_n, BG] \cong [B_\infty, BG];$$

в частности, отображение γ не зависит от выбора эквивалентностей $\{f_n\}$.

Ясно, что локализация или пополнение внутреннего расслоения является внутренним расслоением.

Теорема (инерция внутреннего послойного гомотопического типа). *Пусть γ — стабильное сферическое расслоение над пространством B_∞ (обычное, локальное или полное), являющееся внутренним по отношению к фильтрации $\{B_n\}$ пространства B_∞. Пусть A_∞ — какой-нибудь фильтрованный автоморфизм пространства B_∞:*

$$B_\infty \xrightarrow{A_\infty} B_\infty = \lim_{n\to\infty} \left(B_n \xrightarrow[\cong]{A_n} B_n\right).$$

Тогда A_∞ сохраняет послойный гомотопический тип γ, т. е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} B_\infty \arrow[rr, "A_\infty"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & B_\infty \arrow[dl, "\gamma"] \\ & BG & \end{tikzcd}$$

послойно гомотопически коммутативна.

Доказательство. Нам удобно будет считать, что $d_n = n$ и $d(n) = 2n$. Это интуитивное упрощение можно устранить путем несложной модификации последующих рассуждений.

Рассмотрим сферические расслоения

$$\begin{tikzcd} S^{d_{n-1}} \arrow[r] & \gamma_n \arrow[d] & S^{d_n} \arrow[r] & \gamma_{n+1} \arrow[d] \\ & B_n \arrow[rr, "i"] & & B_{n+1} \end{tikzcd} \qquad i^*\gamma_{n+1} \cong \gamma_n * S^{d_n - d_{n-1}},$$

фильтрованный автоморфизм

$$\begin{tikzcd} \{\text{слой } j\} = F_n \arrow[r] & B_n \arrow[r, "A_n"] \arrow[d, "i"] & B_n \arrow[d, "i"] \\ & B_{n+1} \arrow[r, "A_{n+1}"] & B_{n+1} \end{tikzcd}$$

и отображение e, являющееся эквивалентностью над $d(n)$-м остовом

$$\begin{tikzcd} B_n \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, "\text{сечение}"'] & & \gamma_{n+1} \\ & i^*\gamma_{n+1} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Мы можем считать, что отображение A_{n+1} клеточно, что отображение A_n послойно и что отображение e послойно и индуцирует тождественное отображение базы. Сузим отображения e, A_{n+1} и A_n на пространства, лежащие над n-м остовом пространства B_{n+1}:

$$\begin{array}{ccccc} \gamma_{n+1}/ & \xleftarrow{e/} & B_n/ & \xrightarrow{A_n/} & B_n/ \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & (B_{n+1})_n & \xrightarrow{A_{n+1}/} & (B_{n+1})_n \end{array}$$

Сделав отображения $e/$ и $A_n/$ клеточными и сузив их на $2n$-е остовы, мы получим отображения

$$(\gamma_{n+1}/)_{2n} \xleftarrow{(e/)_{2n}} (B_n/)_{2n} \xrightarrow{(A_n/)_{2n}} (B_n/)_{2n}.$$

Так как отображения A_n и A_{n+1} были гомотопическими эквивалентностями, то и отображение $(A_n/)_{2n}$ является гомотопической эквивалентностью. Отображение же $(e/)_{2n}$ является гомотопической эквивалентностью, согласно определению внутреннего расслоения. С другой стороны, отображение

$$\gamma_{n+1}/ \to (B_{n+1})_n$$

является S^n-расслоением, и потому

$$\gamma_{n+1}/ \cong (\gamma_{n+1}/)_{2n}.$$

Следовательно, мы можем «подкрутить» автоморфизм $(A_n/)_{2n}$ с помощью автоморфизма $(e/)_{2n}$, в результате чего мы получим автоморфизм $\widetilde{A}$ расслоения $\gamma_{n+1}/$, накрывающий автоморфизм $(A_{n+1})_n$:

$$\begin{array}{ccc} \gamma_{n+1}/ & \xrightarrow[\cong]{\widetilde{A}} & \gamma_{n+1}/ \\ \downarrow & & \downarrow \\ (B_{n+1})_n & \xrightarrow{(A_{n+1})_n} & (B_{n+1})_n \end{array}$$

Тогда композиция

$$\gamma_{n+1}/ \xrightarrow{\widetilde{A}} \gamma_{n+1}/ \xrightarrow{(A^*_{n+1})^{-1}} A^*_{n+1}(\gamma_{n+1}/)$$

является послойной гомотопической эквивалентностью, накрывающей тождественное отображение остова $(B_{n+1})_n$.

Переход к пределу при $n \to \infty$ дает гомотопически коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} B_\infty \arrow[rr, "A_\infty"] \arrow[dr] & & B_\infty \arrow[dl] \\ & BG & \end{tikzcd}$$

Следствие. *Любой автоморфизм пространства BG, сохраняющий фильтрацию $\{BG_n\}$, гомотопен тождественному.*

Замечание 1. Имеется по крайней мере один гомотопический автоморфизм пространства BG, не гомотопный тождественному: отображение

$$x \longmapsto x^{-1},$$

определяемое H-структурой в BG.

Замечание 2. В конкретных примерах, связанных с пространствами BO, BPL, BG ..., фильтрованные автоморфизмы соответствуют тем операциям над расслоениями, которые являются автоморфизмами и сохраняют геометрическую размерность слоя, т. е. автоморфизмам, которые имеют геометрическую природу. Поэтому нашу теорему можно сформулировать так: геометрические автоморфизмы теорий расслоений сохраняют стабильный послойный гомотопический тип.

Когда l-адическое расслоение является пополнением l-локального расслоения? Как показано в первой и третьей главах, существуют расслоенные квадраты

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_l \arrow[r] \arrow[d] & \hat{\mathbb{Z}}_l \arrow[d, "\otimes \mathbb{Q}"] \\ \mathbb{Q} \arrow[r, "\otimes \hat{\mathbb{Z}}_l"] & \bar{\mathbb{Q}}_l, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (BSG_n)_l \arrow[r] \arrow[d] & (BSG_n)_l^{\wedge} \arrow[d] \\ (BSG_n)_0 \arrow[r] & (BSG_n)_0^{\text{формальное } l\text{-пополнение}} \end{tikzcd}$$

Поэтому имеет место

Следствие 5. *Ориентированное $\widehat{S}_l^{n-1}$-расслоение является пополнением S_l^{n-1}-расслоения в том и только в том случае, когда*

(*n четно*) *образ класса Эйлера при гомоморфизме*

$$H^n(\text{база};\ \widehat{\mathbb{Z}}_l) \xrightarrow{\otimes \mathbb{Q}} H^n(\text{база};\ \overline{\mathbb{Q}}_l)$$

рационален, т. е. лежит в образе гомоморфизма

$$H^n(\text{база};\ \mathbb{Q}) \xrightarrow{\otimes \widehat{\mathbb{Z}}_l} H^n(\text{база};\ \overline{\mathbb{Q}}_l);$$

(*n нечетно*) *класс Хопфа, являющийся априори элементом группы*

$$H^{2n-2}(\text{база};\ \overline{\mathbb{Q}}_l),$$

рационален.

Доказательство. Ограничимся случаем четного n. В этом случае наш расслоенный квадрат эквивалентен квадрату

$$\begin{tikzcd}
(BSG_n)_l \arrow[r] \arrow[d, "\substack{\text{рациональный}\\ \text{класс Эйлера}}"'] & (BSG_n)_l^{\widehat{}} \arrow[d, "\substack{l\text{-адический}\\ \text{класс Эйлера}}"] \\
K(\mathbb{Q},\ n) \arrow[r] & K(\overline{\mathbb{Q}}_l,\ n)
\end{tikzcd}$$

и утверждение вытекает из следующего общего свойства расслоенных квадратов. Пусть имеется расслоенный квадрат CW-комплексов

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
C \arrow[r] & D.
\end{tikzcd}$$

Тогда отображение любого CW-комплекса X в B и C и гомотопия между соответствующими отображениями X в D гомотопически однозначно определяют отображение X в A.

Добавление. Связь между локальными и полными расслоениями можно представить себе и по-другому.

Именно, благодаря эквивалентности

$$(BSG_n)_l^{\wedge} \cong \prod_{p \in l} (BSG_n)_p^{\wedge}$$

S_l^{n-1}-расслоение можно отождествить с набором $\hat{S}_p^{n-1}$-расслоений, по одному для каждого $p \in l$, подчиненных условию согласованности, которое заключается в том, что у этих расслоений характеристические классы (Эйлера или Хопфа, с коэффициентами в $\mathbb{Q}_p$) являются образом одного рационального класса.

Главные сферические расслоения. Некоторые локальные (или l-адические) сферы естественно гомотопически эквивалентны топологическим группам. Таким образом, мы можем говорить о главных сферических расслоениях. Легко описать классифицирующее пространство для главных сферических расслоений и его отображение в классифицирующее пространство для ориентируемых сферических расслоений.

Предложение. *Пусть p — простое нечетное число. Пополненная сфера $\hat{S}_p^{n-1}$ гомотопически эквивалентна топологической группе (или пространству петель) в том и только в том случае, когда n четно и делит $2p-2$*[1]).

Следствие. *Локальная сфера S_l^{2n-1} гомотопически эквивалентна пространству петель в том и только в том случае, когда*

$$l \subseteq \{p\colon\ \mathbb{Z}/n \subseteq p\text{-адические единицы}\}.$$

Прежде чем доказывать эти утверждения, заметим, что если сфера S_l^{2n-1} имеет классифицирующее пространство $P^\infty(n, l)$, то

$$\Omega P^\infty(n, l) \cong S_l^{2n-1},$$

[1]) Если $p=2$, то хорошо известно, что только сферы S^1, S^3 и S^7 являются H-пространствами, причем S^7 не является пространством петель.

и из наличия расслоения

$$S_l^{2n-1} \to * \to P^\infty(n, l)$$

следует, что

(i) алгебра $H^*(P^\infty(n, l); \mathbb{Z}_l)$ изоморфна алгебре полиномов от одной образующей размерности $2n$;

(ii) для каждого выбора ориентации сферы S_l^{2n-1} существует естественное отображение

$$P^\infty(n, l) \to (BSG_{2n})_l,$$

такое, что при соответствующем отображении колец когомологий класс Эйлера из когомологий пространства $(BSG_{2n})_l$ переходит в полиномиальную образующую кольца когомологий $P^\infty(n, l)$.

Доказательство предложения. Стандартное рассуждение, использующее умножение в когомологиях, показывает, что сферическое H-пространство должно быть нечетномерным.

Если $\widehat{S}_p^{n-1}$ есть пространство петель, ΩB_n, то ясно, что когомологии $\bmod p$ пространства B_n составляют алгебру полиномов с одной образующей размерности n. Рассматривая действие операций Стинрода в $H^*(B_n; \mathbb{Z}/p)$, мы найдем, что числэ $\lambda = n/2$ должно делить число $(p-1)p^k$ при достаточно большом k [1]). Рассматривая затем вторичные операции (и используя результаты Лю-

[1]) Действительно, если $\alpha \in H^n(B_n; Z_p)$ — полиномиальная образующая, то $\alpha^p = \mathscr{P}^{n/2}\alpha \neq 0$, где $\mathscr{P}^j$ есть j-я степень Стинрода. Классическая формула Адема (см. Adem J., The relations of Steenrod powers of cohomology classes, Alg. Geom. and Topol., Princeton, 1957, p. 191—238) показывает, что всякая степень $\mathscr{P}^j$ представляется в виде полинома от степеней вида $\mathscr{P}^{p^k}$. Поэтому найдется такое k, что $\mathscr{P}^{p^k}\alpha \neq 0$; но в этом случае $\dim \mathscr{P}^{p^k}\alpha = n + 2p^k(p-1)$ делится на n. — *Прим. ред.*

левичуса [1]), обобщающие знаменитые работы Адамса [2]) со случая $p=2$ на общий случай), мы найдем, что λ делит $p-1$.

С другой стороны, если λ делит $p-1$, то мы можем явно построить пространство B_n. Для этого (i) вложим $\mathbb{Z}/\lambda$ в $\mathbb{Z}/p-1 \subseteq \hat{\mathbb{Z}}_p^*$; (ii) выберем такую клеточную реализацию пространства $K(\hat{\mathbb{Z}}_p, 2)$, на которой группа $\hat{\mathbb{Z}}_p^*$ действует клеточно; (iii) образуем пространство

$$B_n = [K(\hat{\mathbb{Z}}_p, 2)/(\mathbb{Z}/\lambda)]\hat{}_p.$$

Мы получим односвязное p-адически полное пространство B_n, у которого алгебра когомологий mod p является алгеброй полиномов с одной образующей размерности n, и пространство петель ΩB_n гомотопически эквивалентно $\hat{S}_p^{n-1}$.

Подробнее, из спектральной последовательности расслоения

$$K(\hat{\mathbb{Z}}_p, 1) \to \{\text{пути}\} \to K(\hat{\mathbb{Z}}_p, 2)$$

и равенства $K(\hat{\mathbb{Z}}_p, 1) = \hat{S}_p^1$ следует, что алгебра $H^*(K(\hat{\mathbb{Z}}_p, 2); \mathbb{Z}/p)$ является алгеброй полиномов от одной образующей x размерности 2. Так как λ взаимно просто с p, то из спектральной последовательности расслоения

$$K(\hat{\mathbb{Z}}_p, 2) \to K(\hat{\mathbb{Z}}_p, 2)/(\mathbb{Z}/\lambda) \to K(\mathbb{Z}/\lambda, 1)$$

---

[1]) Подразумевается статья Люлевичуса (Liulevicius A., The factorisation of cyclic reduced powers by secondary cohomology operations, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **46**, no. 7 (1960), 978—981; см. также книгу под тем же названием в серии Memoirs of the American Mathematical Society, Providence, 1962). Рассуждение, приведенное в предыдущем примечании, можно повторить, заменив формулы Адема формулами Люлевичуса, представляющими $\mathcal{P}^{p^k}$ как полиномы от вторичных когомологических операций; этим доказывается делимость числа $2p-2$ на n. — *Прим. ред.*

[2]) Подразумевается цикл работ Адамса, опубликованный в книге Adams J. F., Stable homotopy theory, Springer Lecture Notes, no. 3 (1966). — *Прим. ред.*

следует, что алгебра когомологий mod p пространства $K(\hat{\mathbb{Z}}_p, 2)/(\mathbb{Z}/\lambda)$ является подалгеброй в алгебре когомологий mod p пространства $K(\hat{\mathbb{Z}}_p, 2)$, состоящей из полиномов, инвариантных относительно отображений

$$(1, x, x^2, x^3, \ldots) \xrightarrow{\alpha} (1, \alpha x, \alpha^2 x^2, \ldots),$$

где $\alpha \in \mathbb{Z}/p$ — примитивный корень степени λ из единицы. Таким образом, $H^i(B_n; \mathbb{Z}/p) = 0$ при $i < n$, а это означает ввиду p-адической полноты пространства B_n, что $H^i(B_n; \mathbb{Z}) = 0$ при $i < n$. Так как, далее,

$$\pi_1(K(\hat{\mathbb{Z}}_p, 2)/(\mathbb{Z}/\lambda))\hat{}_p = (\mathbb{Z}/\lambda)\hat{}_p = 0,$$

то B_n односвязно, и из теоремы Гуревича следует, что B_n $(n-1)$-связно. Следовательно, пространство петель ΩB_n является $(n-2)$-связным p-адически полным пространством с $H^i(\Omega B_n; \mathbb{Z}/p) = 0$ при $i \neq n-1$ и $H^{n-1}(\Omega B_n; \mathbb{Z}/p) = \mathbb{Z}/p$. Поэтому $H^i(\Omega B_n; \mathbb{Z}) = 0$ при $i \neq n-1$, $H^{n-1}(\Omega B_n; \mathbb{Z}) = \hat{\mathbb{Z}}_p$ и $\Omega B_n \cong \hat{S}_p^{n-1}$.

Доказательство следствия. Если l содержится в множестве $\{p \mid n \text{ делит } (p-1)\}$ [1]), то составим расслоенное произведение

$$\begin{array}{c} \prod\limits_{p \in l} B_{2n}^p \\ \downarrow \\ K(\mathbb{Q}, 2n) \to K(\bar{\mathbb{Q}}_l, 2n) \end{array}$$

где B_{2n}^p — построенное выше классифицирующее пространство сферы $\hat{S}_p^{2n-1}$. Переходя к пространствам петель, мы получим расслоенный квадрат

$$\begin{array}{ccc} S_l^{2n-1} & \to & \prod\limits_{p \in l} \hat{S}_p^{2n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_0^{2n-1} & \to & (S_0^{2n-1})_l^{-} \end{array}$$

из которого сразу вытекает наше утверждение.

[1]) Мы при этом оставляем неразобранным лишь случай $n = 2$, т. е. сферу S_l^3.

Изоморфизм Тома. Подобно обычному сферическому расслоению, S_l^{n-1}-расслоение $E \to X$ вместе с ориентацией

$$U_\xi \in H^n(E \to X;\ \mathbb{Z}_l)$$

определяет изоморфизм Тома

$$H^i(X;\ \mathbb{Z}_l) \xrightarrow[\cong]{\smile U_\xi} H^{i+n}(E \to X;\ \mathbb{Z}_l).$$

(Это можно доказать индукцией по клеткам базы, используя последовательности Майера — Виеториса.)

Обратно, если $f\colon A \to X$ — расслоение и класс

$$U \in H^n(A \to X;\ \mathbb{Z}_l)$$

таков, что умножение

$$H^i(X;\ \mathbb{Z}_l) \xrightarrow{\smile U} H^{i+n}(A \to X;\ \mathbb{Z}_l)$$

является изоморфизмом, то при известных ограничениях на фундаментальную группу можно показать, что $f\colon A \to X$ есть ориентированное S_l^{n-1}-расслоение (аналогичный факт о сферических расслоениях доказан Спиваком [1])).

Предположим, например, что фундаментальная группа пространства X тривиально действует на когомологиях слоя расслоения f. Тогда из спектральной последовательности расслоения $f\colon A \to X$ следует, что

$$H^*(\text{слой};\ \mathbb{Z}_l) \cong H^*(S_l^{n-1};\ \mathbb{Z}_l).$$

Если при этом слой является «простым пространством», то можно произвести послойную локализацию [2]), и мы получим S_l^{n-1}-расслоение над X:

$$\begin{tikzcd}
\text{слой} \arrow[r] \arrow[d, "\text{локализация}"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "\substack{\text{послойная}\\ \text{локализация}}"] & X \arrow[d, equal] \\
S_l^{n-1} \arrow[r] & E \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

---

[1]) См. Spivak M., Spaces satisfying Poincaré duality, *Topology*, 6, No. 1 (1967), 77—101. — *Прим. ред.*

[2]) См. доказательство теоремы 4.2.

Подобное верно и для l-адических расслоений.

Джойн Уитни определяет спаривание S_l^{n-1}- и S_l^{m-1}-теорий в S_l^{n+m-1}-теорию: мы можем образовать джойн слоев $(S_l^{n-1}$ и $S_l^{m-1})$ над каждой точкой и получить S_l^{n+m-1}-расслоение. Конечно, при этом используется соотношение

$$S_l^{n-1} * S_l^{m-1} \cong S_l^{n+m-1}.$$

Аналогичное соотношение между пополненными сферами не имеет места, однако

$$(\hat{S}_l^{n-1} * \hat{S}_l^{m-1})_l^{\wedge} \cong \hat{S}_l^{n+m-1},$$

и потому композиция послойного джойна с «послойным пополнением» определяет спаривание в l-адических теориях.

Доказательство теоремы 4.2. (i) Отображение l строится при помощи *послойной локализации*. Пусть ξ — расслоение над симплексом σ со слоем F. Предположим, что F есть простое пространство и что задано отображение ∂l

$$\begin{tikzcd} \xi \mid \partial\sigma \arrow[rr, "\partial l"] \arrow[dr, "(\text{слой } F)"'] & & \partial\xi' \arrow[dl, "(\text{слой } F_l)"] \\ & \partial\sigma & \end{tikzcd}$$

локализующее каждый слой. Если нам удастся построить отображение t, делающее диаграмму

$$\begin{tikzcd} \xi \mid \partial\sigma \arrow[r] \arrow[d, "\partial l"'] & \xi \arrow[r, phantom, "\overset{\text{произвольная тривиализация}}{\cong}"] & \sigma \times F \arrow[d, "\text{проекция}"] \\ \partial\xi' \arrow[r, dotted, "t"] & F_l & F \arrow[l, "\text{локализация}"'] \end{tikzcd}$$

коммутативной, то мы сможем продолжить ∂l до послойной локализации l расслоения ξ над всем симплексом σ,

положив

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \xi \arrow[rr, "t"] \arrow[dr] & & \xi' \arrow[dl] \\ & \sigma & \end{tikzcd} \qquad \xi' = \text{конус отображения } t\text{ [1]} \cong \sigma \times F_l.$$

Но так как

$$H^*(\partial\xi', \xi \mid \partial\sigma;\ \pi_* F_l) \cong H^*(\partial\sigma \times (F_l,\ F);\ \mathbb{Z}_l\text{-модуль}) = 0,$$

то, согласно теории препятствий, нужное нам отображение t существует. Таким образом, мы можем послойно локализовать любое расслоение, слой которого прост — для этого надо последовательно локализовать расслоение над остовами базы. Мы получим в результате «гомотопически локально тривиальное» расслоение, которое однозначно определяет расслоение Гуревича со слоем F_l.

Если F — такое пространство, что

$$H^*(\hat{F}_l,\ F;\ \hat{\mathbb{Z}}_l) = 0,$$

то аналогичные рассуждения доказывают возможность *послойного пополнения* расслоений со слоем F. В частности, мы видим, что можно послойно пополнять сферические расслоения.

Подобным же образом проверяется, что операции послойной локализации и послойного пополнения сферических расслоений функториальны и что возникающая диаграмма

$$\begin{tikzcd} BG_n \arrow[r, "l"] \arrow[dr, "c"'] & B_l^n \arrow[d, "c"] \\ & \hat{B}_l^n \end{tikzcd}$$

коммутативна. Первое утверждение теоремы доказано.

---

[1]) Конус непрерывного отображения φ: $A \to B$ определяется как результат приклеивания к B конуса над A по отображению φ основания конуса (отождествляемого с A) в B. — *Прим. ред.*

Для доказательства второго и третьего утверждений рассмотрим последовательность теорий

$$U:\left\{\begin{matrix}\text{ориентированные}\\ S_R\text{-расслоения}\end{matrix}\right\}\xrightarrow{f}\left\{S_R\text{-расслоения}\right\}\xrightarrow{w} H^1(\ ;R^*),$$

где $R=\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_l$ или $\hat{\mathbb{Z}}_l$, а $S_R=S^{n-1}$, S_l^{n-1} или $\hat{S}_l^{n-1}$ соответственно. Здесь первое отображение — это «забывание» ориентации, второе — замена каждого слоя его группой $(n-1)$-мерных целочисленных когомологий (эта замена дает локальную систему на базе со значениями в R, которая характеризуется элементом группы $H^1(\ ;R^*)$).

Далее, свойство накрывающей гомотопии показывает, что S_R-расслоение над S^{i+1} может быть построено по гомотопическому автоморфизму пространства $S^i\times\times S_R$, сохраняющему слои проекции $S^i\times S_R\to S^i$. Мы можем рассматривать этот автоморфизм как отображение сферы S^i в пространство автоморфизмов $\operatorname{Aut} S_R$ пространства S_R. При этом можно считать, что базисная точка экватора S^i переходит в единичный элемент множества $\operatorname{Aut} S_R$. Если $i=0$, то расслоение определяется компонентой образа другой точки экватора. Но в последовательности

$$\pi_0 \operatorname{Aut} S_R\to[S_R,\ S_R]\to\pi_{n-1}S_R\to H_{n-1}S_R$$

первое отображение является вложением на множестве обратимых элементов, а второе и третье — изоморфизмами. Следовательно,

$$\pi_0 \operatorname{Aut} S_R\cong R^*\cong \operatorname{Aut}(H_{n-1}S_R).$$

Этим доказано второе утверждение теоремы, а также тот факт, что любое ориентируемое S_R-расслоение над S^1 тривиально.

Вообще, задание ориентации на S_R-расслоении (над базой с отмеченной точкой) определяет вложение в него тривиального расслоения $S_R\to *$. Если база связна, то и, обратно, такое вложение определяет ориентацию

расслоения[1]). Построенная выше последовательность U определяет последовательность классифицирующих пространств

$$\tilde{B}R \xrightarrow{f} BR \xrightarrow{w} K(R^*, 1).$$

Таким образом, если $i > 0$, то

$$\begin{aligned}
\pi_{i+1}\tilde{B}R &\cong [S^{i+1}, \tilde{B}R] \cong \\
&\cong \{\text{ориентированные расслоения над } S^{i+1}\} \cong \\
&\cong \{\text{базированные расслоения над } S^{i+1}\} \cong \\
&\cong [S^{i+1}, BR]_b \cong \\
&\cong \pi_{i+1}BR.
\end{aligned}$$

Следовательно, последовательность U индуцирует следующие отображения в гомотопических группах:

$$* \xrightarrow{f} R^* \xrightarrow[\cong]{w} R^* \text{ для } \pi_1, \qquad \pi_{i+1} \xrightarrow[\cong]{f} \pi_{i+1} \to * \text{ для } \pi_{i+1}.$$

Таким образом, отображение $\tilde{B}R \to BR$ является универсальным накрытием. Далее, соответствие между ориентированными расслоениями и базированными расслоениями показывает, что группа $\pi_1(BR) \cong R^*$ действует в $\tilde{B}R$ так, как утверждалось в (iii).

Осталось доказать первую часть утверждения (iii).

С помощью индукции по остовам (так же как при доказательстве утверждения (i)) строится естественная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
G_n = \operatorname{Aut} S^{n-1} \arrow[r] \arrow[dr] & \operatorname{Aut} S_l^{n-1} \arrow[d] \\
& \operatorname{Aut} \hat{S}_l^{n-1}
\end{tikzcd}$$

Так как базированные или ориентированные S_R-расслоения над S^{i+1} определяются отображением $S^i \to$ $\to \{\text{компонента тождественного отображения в } \operatorname{Aut} S_R\}$, то нам нужно вычислить отображения гомотопических

---

[1]) Расслоения, для которых фиксировано такое вложение, далее называются *базированными*. — *Прим. ред.*

групп, индуцированных диаграммой

$$\begin{tikzcd} SG_n \arrow[r] \arrow[dr, "c"'] & (\mathrm{Aut}\, S_l^{n-1})_1 \arrow[d] \\ & (\mathrm{Aut}\, \widehat{S}_l^{n-1})_1 \end{tikzcd}$$

Чтобы изучить, например, отображение c, рассмотрим диаграмму

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} (S^{n-1}, S^{n-1})_1^{\mathrm{b}} \arrow[r, "c_1", "\text{пополнение}"'] \arrow[d] & (\widehat{S}_l^{n-1}, \widehat{S}_l^{n-1})_1^{\mathrm{b}} \arrow[d] \\ SG_n \arrow[r, "c", "\text{пополнение}"'] \arrow[d] & (\mathrm{Aut}\, \widehat{S}_l^{n-1})_1 \arrow[d] \\ S^{n-1} \arrow[r, "c_0", "\text{пополнение}"'] & \widehat{S}_l^{n-1} \end{tikzcd}$$

Ясно, что c_0 определяет в гомотопических группах тензорное умножение на $\widehat{\mathbb{Z}}_l$. Элемент i-й гомотопической группы правого верхнего пространства является, по определению, гомотопическим классом отображений

$$S^i \times S_R \to S_R \quad (S_R = \widehat{S}_l^{n-1}),$$

тождественных на $* \times S_R$ и постоянных на $S^i \times *$. Сдвигая эти отображения в каждом слое на тождественное отображение, мы приходим к гомотопическим классам отображений, постоянных на $* \times S_R$ и на $S^i \times *$, т. е. к гомотопическим классам отображений

$$S^i \wedge S_R \to S_R\ ^{1)}.$$

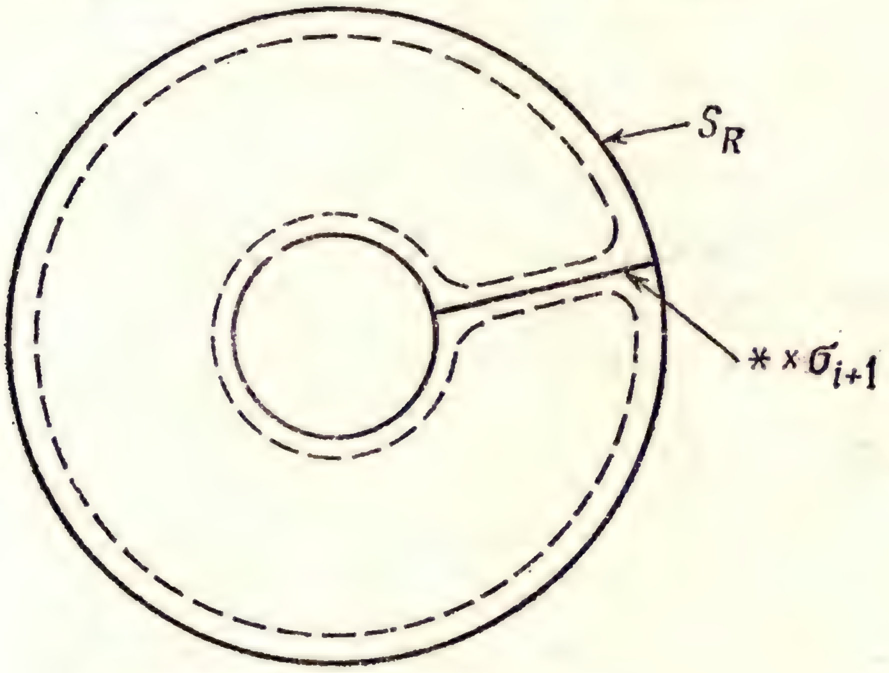
[1]) «Послойный сдвиг» понимается в смысле сложения отображений $S_R \to S_R$, подобного сложению сфероидов, определяющему операцию сложения в гомотопических группах. Это можно понимать и иначе. Поскольку $(S_R, S_R)^{\mathrm{b}}$ есть H-пространство (S_R является надстройкой), имеется каноническая гомотопическая эквивалентность $(S_R, S_R)_1^{\mathrm{b}} \to (S_R, S_R)_0^{\mathrm{b}}$, где 0 означает компоненту постоянного отображения; базированное же отображение $S^i \to (S_R, S_R)_0^{\mathrm{b}}$ равнозначно отображению $S^i \wedge S_R \to S_R$. Кстати, значок $\wedge$ обозначает «smash-product»: $A \wedge B = A \times B/[(A \times *) \cup \cup (* \times B)]$; обычно вместо $\wedge$ пишут $\#$. — *Прим. ред.*

Множество таких гомотопических классов изоморфно в свою очередь множеству

$$[\hat{S}_l^{n+i-1}, \hat{S}_l^{n-1}] \cong [S^{n+i-1}, \hat{S}_l^{n-1}] \cong$$
$$\cong \pi_{n+i-1} S^{n-1} \otimes \hat{\mathbb{Z}}_l.$$

Итак, мы видим, что C_l тоже индуцирует в гомотопических группах l-адическое пополнение.

Как известно, левый столбец изучаемой диаграммы является расслоением Гуревича и, следовательно, индуцирует длинную точную последовательность гомотопических групп. Покажем, что правый столбец тоже индуцирует точную гомотопическую последовательность. Рассмотрим для этого препятствие к достраиванию коммутативной диаграммы



$$\begin{tikzcd}
\sigma_{i+1}\times S_R \arrow[d, "\text{вложение}"] \arrow[dr, dotted] & \\
\partial\sigma_{i+1}\times S_R \cup \sigma_{i+1}\times * \arrow[r] & S_R
\end{tikzcd}$$

Оно лежит в группе

$$H^k((\sigma_{i+1}, \partial\sigma_{i+1}) \times (S_R, *); \pi_{k-1} S_R).$$

Но эта группа тривиальна, если $k \neq n+1$, и равна

$$\pi_{n+i-1} \hat{S}_l^{n-1} \cong \pi_i \text{ («слой»)},$$

если $k = n+1$. Таким образом, правый столбец диаграммы (*) действительно индуцирует точную гомотопическую последовательность, и из этого следует, что отображение c индуцирует в группах гомотопий тензорное умножение на $\hat{\mathbb{Z}}_l$ [1]).

---

[1]) Это доказывается рассуждением, копирующим обычное доказательство 5-леммы. — *Прим. ред.*

Итак, мы доказали, что отображение

$$BSG_n \to \{\text{универсальное накрытие над } \widehat{B}_n^l\}$$

является l-адическим пополнением.

Аналогично доказывается, что отображение

$$BSG_n \to \{\text{универсальное накрытие над } B_n^l\}$$

является локализацией, и это завершает доказательство теоремы 4.2.

Глава 5

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ЭТАЛЬ-ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

ВВЕДЕНИЕ

Мы обсудим теперь замечательную теорию, происходящую из алгебраической геометрии, — теорию гомотопических типов алгебраических многообразий. Ее основное содержание составляет чисто алгебраическая конструкция проконечного пополнения гомотопического типа комплексного алгебраического многообразия.

Мы будем рассматривать комплексные *аффинные* многообразия $V \subseteq \mathbb{C}^k$, например, такие, как

$$GL(n, \mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}^{n^2+1} = \{(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}, y) \mid \det(x_{ij}) \cdot y = 1\}.$$

Мы будем также рассматривать алгебраические многообразия конечного типа, получающиеся при склеивании конечного числа аффинных многообразий, например таких, как проективная прямая $P^1(\mathbb{C}) = \{$пространство прямых в $\mathbb{C}^2\} = A_1 \cup A_2$ с диаграммой склейки

$$A_1 \leftarrow A_1 \cap A_2 \rightarrow A_2,$$

изоморфной диаграмме

$$\mathbb{C} \xleftarrow{\text{включение}} \{\mathbb{C} - 0\} \xrightarrow{\text{обращение } (x \mapsto x^{-1})} \mathbb{C}.$$

Поле $\mathbb{C}$ играет в этих примерах только роль «поля определения». Каждое из этих двух определений дает для любого коммутативного кольца R многообразие над R: $GL(n, R)$ и $P^1(R)$. Для этого надо лишь заметить, что соотношение, выделяющее $GL(n, \mathbb{C})$, и склеивающие функции для $P^1(\mathbb{C})$ естественным образом лежат в R (так как они лежат в $\mathbb{Z}$).

Известное понятие *предсхемы над кольцом* R [1]) описывает объект, который получается некоторой об-

---

[1]) Точное определение см., например, в книге MacDonald I. G., Introduction to schemes, Benjamin, N. Y.

щей конструкцией склеивания аффинных R-многообразий. Понятие алгебраического многообразия над R (или схемы) получается из него добавлением условия замкнутости диагонали.

Наша основная конструкция естественным образом относит каждой предсхеме S этальный гомотопический тип $\varepsilon(S)$. Этот этальный гомотопический тип представляет собой проективную систему обычных гомотопических типов, которые строятся по «алгебраическим покрытиям» (т. е. этальным покрытиям) предсхемы S. Процедура построения гомотопического типа по алгебраическому покрытию предсхемы [1]) аналогична построению чеховского нерва по топологическому покрытию топологического пространства. Опять-таки, аналогично теории Чеха, гомотопические типы индексируются множеством всевозможных покрытий предсхемы, частично упорядоченным относительно вписанности.

В работе Артина — Мазура [2]) доказано несколько теорем, связывающих

(i) классический гомотопический тип многообразия над полем комплексных чисел и его этальный гомотопический тип;

(ii) этальные гомотопические типы одного и того же многообразия, рассматриваемого над разными кольцами.

Например, имеет место

Теорема 5.1. *Если V — алгебраическое многообразие конечного типа над $\mathbb{C}$, то существует естественный гомотопический класс отображений*

$$\underset{\substack{\text{классический}\\ \text{гомотопический тип}}}{V_{\mathrm{cl}}} \xrightarrow{f} \underset{\substack{\text{этальный}\\ \text{гомотопический тип}}}{V_{\mathrm{et}}} = \left\{\begin{array}{l}\text{проективная си-}\\ \text{стема «нервов»}\\ \text{этальных по-}\\ \text{крытий много-}\\ \text{образия } V\end{array}\right\},$$

[1]) Простое описание этой процедуры имеется в статье Lubkin S., On a conjecture of Andre Weil, *Amer. J. of Math.*, **89**, No. 2 (1967), 456.

[2]) Artin M., Mazur B., Etale homotopy, II, Springer Lecture Notes, No. 100 (1969).

индуцирующий для любой локальной системы A конечных абелевых групп изоморфизм

$$H^*(V;\ A) \xrightarrow{\cong} \varinjlim_{\substack{\text{этальные}\\ \text{покрытия}}} H^*(\text{нерв};\ A).$$

В действительности Артин и Мазур использовали конструкцию нервов, более тонкую, чем чеховскую, — сплетающую нервы целой системы этальных покрытий. Их конструкция основывалась на понятии гиперпокрытия, введенного Вердье.

Они развили также некоторую гомотопическую теорию проективных систем гомотопических типов. Под отображением

$$\{X_i\} \to \{Y_i\}$$

одной проективной системы в другую они понимают элемент множества

$$\varprojlim_j \varinjlim_i [X_i,\ X_j].$$

Из теоремы 5.1. следует, что для комплексного алгебраического многообразия X конечного типа

$$\left\{\begin{matrix}\text{этальный}\\ \text{гомотопический}\\ \text{тип } X\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{проективная система}\\ \text{гомотопических типов}\\ \text{с конечными гомото-}\\ \text{пическими группами}^{1)}\end{matrix}\right\} \cong$$

$$\cong \{F\}_{\{f\}} \quad \text{(в смысле описанных выше отображений),}$$

где $\{f\}$ — категория, использовавшаяся в гл. 3 при построении проконечного пополнения классического гомотопического типа. Таким образом, мы можем построить обратный предел «нервов» этальных покры-

---

[1]) Для того чтобы гомотопические группы «нервов» этальных покрытий были конечными, нужно наложить на X дополнительные требования: нормальности или неособости. В общем случае при алгебраическом построении проконечного пополнения $\widehat{X}$ многообразия X надо брать проконечные пополнения «нервов».

тий и получить алгебраическую конструкцию проконечного пополнения $\widehat{X}$ обычного гомотопического типа комплексного алгебраического многообразия X.

Сначала мы постараемся объяснить, почему удобно использовать этальные методы. Для этого мы обсудим на некоторых примерах небольшую модификацию конструкции Лабкина построения чеховских комплексов. После этого мы изучим «полный этальный гомотопический тип» и его симметрии Галуа в случае конечного грассманиана. В качестве мотивировки следует постоянно иметь в виду «лемму об инерции» из гл. 4.

§ 1. ИНТУИТИВНОЕ ОБСУЖДЕНИЕ ЭТАЛЬНОГО ГОМОТОПИЧЕСКОГО ТИПА

Пусть V — неприводимое комплексное алгебраическое многообразие. Рассмотрим задачу нахождения когомологий V чисто алгебраическими средствами. Оказывается, что это можно сделать, если рассмотреть когомологии с конечными коэффициентами. (Напомним, что когомологии гладкого многообразия с вещественными коэффициентами можно найти аналитически через дифференциальные формы.)

Сингулярный метод описания когомологий использует понятие непрерывного отображения

$$\text{симплекс} \to \left\{\begin{matrix}\text{топологическое пространство,}\\ \text{определяемое алгебраическим}\\ \text{многообразием } V\end{matrix}\right\},$$

и мы должны от него отказаться. Чеховский метод вычисления когомологий более алгебраичен — он использует лишь структуру открытых подмножеств в V. Часть этой структуры алгебраична по природе. Действительно, существует естественное отображение

$$\left\{\begin{matrix}\text{структура}\\ \text{подмногообразий } V\end{matrix}\right\} \xrightarrow{c} \left\{\begin{matrix}\text{структура}\\ \text{открытых}\\ \text{подмножеств}\end{matrix}\right\},$$

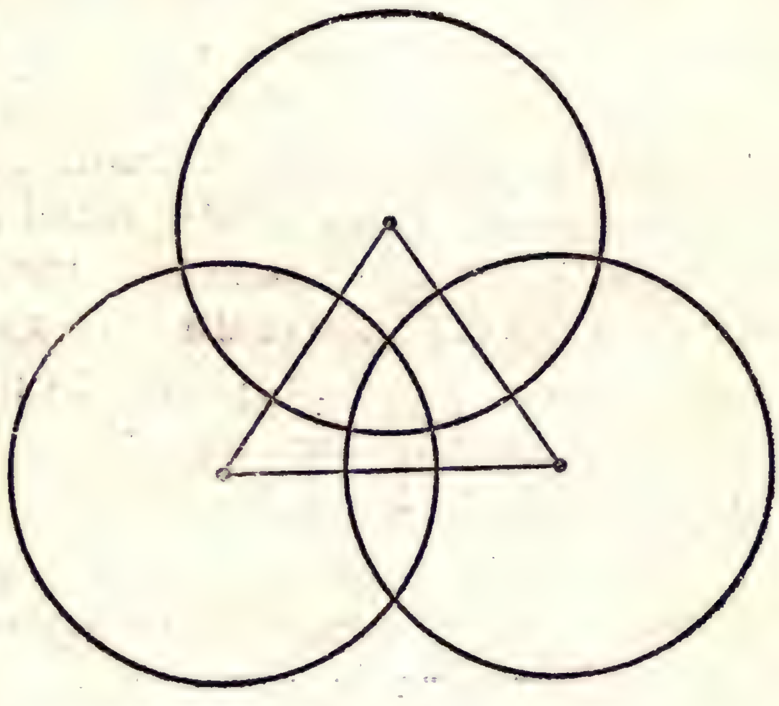
которое относит каждому алгебраическому подмногообразию его дополнение, являющееся открытым по Зарисскому.

Открытые подмножества, лежащие в образе отображения c, определяют на пространстве V топологию Зарисского, которая, таким образом, определяется чисто алгебраически.

Попробуем применить схему Чеха к топологии Зарисского. Пусть $\{U_\alpha\}$ — конечное покрытие многообразия V открытыми по Зарисскому множествами.

Предложение. *Если $\{U_\alpha\}$ состоит из $n+1$ элемента, то нерв покрытия $\{U_\alpha\}$ является n-мерным симплексом.*

Это следует из того, что пересечение конечного числа непустых открытых по Зарисскому подмножеств в U является снова непустым открытым подмножеством, так как ввиду неприводимости V дополнение к каждому подмножеству U_α является подмногообразием вещественной коразмерности два. Так как гомологии симплекса тривиальны, то *непосредственное* применение метода Чеха к топологии Зарисского не дает ничего.



$n=2$

Обобщение этого метода, простое, но имеющее замечательные и далеко идущие применения, было найдено Гротендиком. Замысел Гротендика заключается в следующем.

Прежде всего заметим, что чеховская схема вычисления когомологий покрытия может быть распространена на произвольную категорию. Мы рассматриваем покрытие $\{U_\alpha\}$ как категорию, объектами которой служат множества U_α, а морфизмами — включения $U_\alpha \to U_\beta$.

Ниже мы опишем геометрическую схему этой конструкции, принадлежащую Лабкину.

Далее мы применяем эту конструкцию к категории, построенной из покрытия алгебраического многообразия X при помощи «этальных отображений»

$$\widetilde{U}_\alpha \xrightarrow{\pi} U_\alpha \subseteq X,$$

где U_α — открытое по Зарисскому множество в X и π — *конечнолистное* [1]) накрытие [2]).

Объектами этой категории являются этальные отображения, морфизм объекта $(\widetilde{U}_\alpha, \pi_\alpha)$ в объект $(\widetilde{U}_\beta, \pi_\beta)$ определяется как коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \widetilde{U}_\alpha \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi_\alpha"'] & & \widetilde{U}_\beta \arrow[dl, "\pi_\beta"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Таким образом, теперь может существовать несколько морфизмов одного объекта в другой, а не одно лишь включение, как раньше.

В действительности Гротендик, используя такие этальные покрытия, обобщил понятие топологии и в этом контексте развил теорию когомологий с коэффициентами в пучке.

Из определения ясно, что все такие категории (отвечающие всевозможным этальным покрытиям X) содержат столько же информации об X, сколько ее содержится

(i) во всевозможных покрытиях многообразия X открытыми по Зарисскому множествами;

(ii) в той части фундаментальных групп открытых по Зарисскому множеств, которая восстанавливается по (алгебраическим) конечнолистным накрытиям.

---

[1]) Ясно, что всякое алгебраическое накрытие конечнолистно; теорема Римана и ее обобщения утверждают обратное.

[2]) Подразумевается, что эти отображения составляют «этальное покрытие», т. е. объединение множеств $\pi(\widetilde{U}_\alpha)$, отвечающих всем объектам категории, есть X. — *Прим. ред.*

Чтобы переадресовать эту информацию в гомотопическую теорию, дадим

Определение 5.1 (нерв категории). Пусть C — категория. Определим полусимплициальное множество[1]) $S(C)$ следующим образом:

вершины — объекты категории C;
1-симплексы — морфизмы категории C;
. . . .
n-симплексы — цепочки морфизмов длины n

$$O_0 \xrightarrow{f_1} O_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} O_n.$$

Операции взятия граней отвечают отбрасыванию крайних морфизмов и компонированию соседних морфизмов. Операции вырождения определяются тем, что в цепочку вставляется тождественное отображение.

Нервом категории C мы назовем геометрическую реализацию полусимплициального множества $S(C)$. Гомологические, когомологические и гомотопические группы категории C определяются как гомологические, когомологические и гомотопические группы ее нерва.

Чтобы сделать нерв категории более геометрическим, удобно запретить вырожденные симплексы, т. е. такие цепочки

$$O_0 \xrightarrow{f_1} O_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} O_n,$$

в которых хотя бы одно из отображений f_i является тождественным[2]).

Мы приведем несколько примеров, позволяющих лучше «почувствовать» гомотопическую теорию категорий.

---

[1]) Определение полусимплициальных понятий см. в книге May J. P., Simplicial objects in the algebraic topology, Van Nostrand, Math. Studies, 1967. — *Прим. ред.*

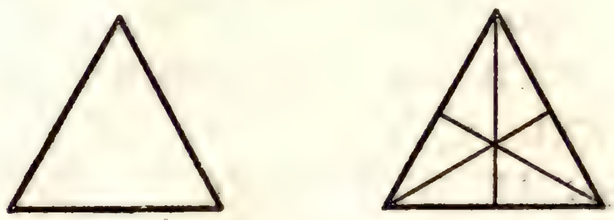
[2]) Эту фразу нужно понимать так: из двух употребительных конструкций геометрической реализации мы выбираем ту, (геометрические) симплексы которой отвечают только невырожденным симплексам реализуемого комплекса. Именно эта реализация описана в цитированной книге Мея. — *Прим. ред.*

Пример 0. (i) Невырожденная часть нерва категории

$$A \to B \leftleftarrows C$$

есть

(ii) Пусть K — симплициальный комплекс. Обозначим через $C(K)$ категорию, объектами которой являются симплексы комплекса K и морфизмами которой являются включения граней в симплексы. Нерв категории $C(K)$ есть не что иное, как (первое) барицентрическое подразделение комплекса K:



K нерв C(K)

(iii) Если всякая пара объектов категории C связывается не более чем одним морфизмом, то нерв категории C является симплициальным комплексом.

(iv) Если в категории C есть финальный объект A, то нерв категории C стягиваем. Действительно,

$$\text{нерв } C \cong \{\text{конус над нервом } (C - A)\}.$$

(v) Нервы категории C и дуальной категории C^* совпадают.

Следующий пример иллюстрирует остроумный метод Лабкина использования понятия нерва категории.

Пример 1. Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ — конечное покрытие конечного полиэдра K. Предположим, что

(i) разность $K - U_\alpha$ является при каждом α подкомплексом;

(ii) множество U_α при каждом α стягиваемо;

(iii) покрытие $\{U_\alpha\}$ «локально направлено», т. е. для любого $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ существует U_γ с $x \in U_\gamma \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$.

Следуя Лабкину, построим подпокрытие $C(\mathcal{U})$ покрытия $\mathcal{U}$, составленное из «наименьших» окрестностей. Именно, мы говорим, что U_α принадлежит $C(\mathcal{U})$, если существует такая точка $x \in K$, что U_α является наименьшим элементом покрытия $\mathcal{U}$, содержащим x. (Из (iii) и конечности покрытия $\mathcal{U}$ следует, что у любой точки x есть единственная «наименьшая окрестность».)

Рассмотрим $C(U)$ как категорию, объектами которой служат U_α, а морфизмами — включения.

Предложение 5.1. *Нерв категории $C(\mathcal{U})$ гомотопически эквивалентен K.*

Доказательство. Предположим, что комплекс K триангулирован таким образом, что

(i) каждый симплекс содержится в некотором элементе покрытия $C(\mathcal{U})$;

(ii) для каждого элемента U_α покрытия $C(\mathcal{U})$ максимальный подкомплекс $K(U_\alpha)$ барицентрического подразделения комплекса K, содержащийся в U_α, стягиваем.

[Если эти условия не выполнены, нам следует таким образом подразделить K, чтобы

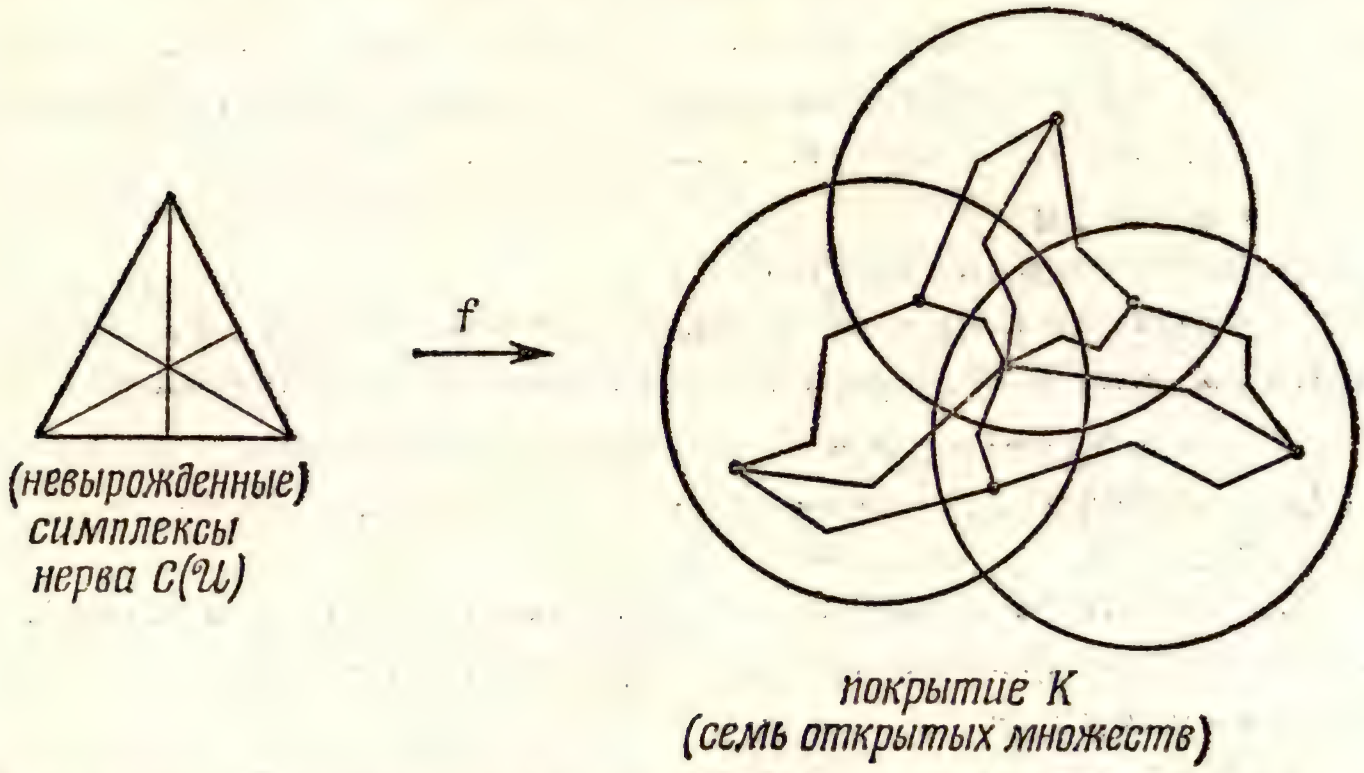
(i) каждый симплекс имел диаметр, меньший, чем число Лебега покрытия $\mathcal{U}$;

(ii) каждое дополнение $K - U_\alpha$ было полным, т. е. содержало симплекс в том и только в том случае, когда оно содержит все его вершины.]

Тогда категория $C(\mathcal{U})$ эквивалентна категории стягиваемых подкомплексов $K(U_\alpha)$ комплекса K. Нетрудно построить канонический гомотопический класс отображений нерва категории $C(\mathcal{U})$ в K.

Отобразим каждую вершину U_α нерва $C(\mathcal{U})$ в какую-нибудь вершину подкомплекса $K_\alpha (= K(U_\alpha)) \subset K$. Каждый 1-симплекс $U_\alpha \to U_\beta$ нерва $C(\mathcal{U})$ отобразим (кусочно линейно) в путь, соединяющий в K_β точки, соответствующие U_α и U_β. Продолжая подобные построения и используя стягиваемость комплексов $K(U_\alpha)$, мы построим кусочно линейное отображение $f\colon C(\mathcal{U}) \to K$. Построим теперь встречное отображе-

ние. Каждому симплексу $\sigma \in K$ отнесем наименьшую окрестность U_σ его центра. Нетрудно проверить, что U_σ



является наименьшей окрестностью любой точки x, принадлежащей внутренности симплекса σ[1]). Следовательно, включение $\sigma \subset \tau$ влечет за собой включение $U_\sigma \supset U_\tau$[2]). Поэтому каждый симплекс барицентрического подразделения комплекса K

$$\sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_n, \quad \sigma_i \in K,$$

соответствует симплексу

$$U_{\sigma_n} \subseteq U_{\sigma_{n-1}} \subseteq \ldots \subseteq U_{\sigma_1}$$

нерва $C(\mathcal{U})$. Это доставляет симплициальное отображение $g: K' \to \{\text{нерв } C(\mathcal{U})\}$, где K' — барицентрическое подразделение комплекса K.

Рассмотрим композиции

$$K' \xrightarrow{g} \{\text{нерв } C(\mathcal{U})\} \to K,$$
$$\{\text{нерв } C(\mathcal{U})\} \xrightarrow{f} K \xrightarrow{\text{id}} K' \xrightarrow{g} \{\text{нерв } C(\mathcal{U})\}.$$

---

[1]) Множество точек, для которых U_α является «наименьшей окрестностью», получается выкидыванием из U_α конечного числа множеств U_β; следовательно, оно является объединением конечного числа открытых симплексов.

[2]) Действительно, U_σ пересекается с внутренностью τ и, следовательно, содержит наименьшую окрестность некоторой внутренней точки τ. — *Прим. ред.*

Можно проверить, что образ симплекса

$$\sigma_1 < \ldots < \sigma_n$$

комплекса K' при первой композиции содержится в $K(U_{\sigma_1})$. Это позволяет без труда построить гомотопию, связывающую эту композицию с тождественным отображением.

Для изучения второй композиции рассмотрим такое подразделение L нерва категории $C(\mathcal{U})$, чтобы отображение f было симплициальным. Каждому симплексу σ триангуляции L отнесем:

(a) наименьший симплекс нерва категории $C(\mathcal{U})$, содержащий σ, скажем $U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_n$;

(b) все множества из $C(\mathcal{U})$, являющиеся «наименьшими окрестностями» центров симплексов вида $f_*\tau$, где τ — грань σ.

Обозначим через $C(\sigma)$ полную подкатегорию $C(\mathcal{U})$, порожденную множествами $U_1, \ldots, U_n$ и множествами, описанными в (b). Так как построение f_σ происходит в U_n, то все объекты категории $C(\sigma)$ лежат в U_n. Следовательно, категория $C(\sigma)$ обладает финальным объектом и, значит, нерв $C(\sigma)$ является стягиваемым подкомплексом $C(\mathcal{U})$.

Кроме того, как это следует из конструкции, включение $\tau \subset \sigma$ влечет за собой включение $C(\tau) \subseteq C(\sigma)$. Таким образом, композиция $g \circ f$ и тождественное отображение *обладают общим ацикличным носителем*

$$\sigma \mapsto C(\sigma)$$

(т. е. $\sigma \subseteq C(\sigma)$ и $g \circ f(\sigma) \subseteq C(\sigma)$) и потому гомотопны (гомотопия строится индукцией по симплексам триангуляции L).

Замечание. Каноническое отображение $g_{\mathcal{U}}$: $K \to \{$нерв $C(\mathcal{U})\}$, где $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ и $C(\mathcal{U})$ есть категория «наименьших окрестностей», построено нами в предположении, что разности $K - U_\alpha$ являются подкомплексами и категория $\mathcal{U}$ конечна и локально направлена. Грубо говоря, отображения типа $g_{\mathcal{U}}$ (для несколько более сложных $\mathcal{U}$) только и нужны Лабкину

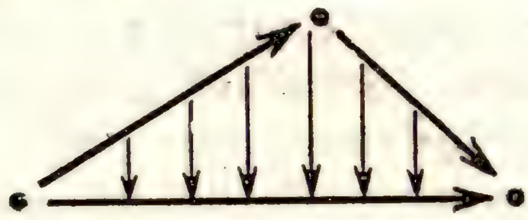
для построения комплексов, аппроксимирующих гомотопический тип алгебраического многообразия. Дополнительные сложности возникают в связи с тем, что приходится рассматривать категории, в которых существует несколько морфизмов между парой объектов.

Пример 2. Пусть π — группа. Обозначим через $C(\pi)$ категорию, в которой есть лишь один объект, π, а морфизмы соответствуют элементам группы π и компонируются в соответствии с умножением в π. *Тогда*

$$N = \{\text{нерв } C(\pi)\} \cong K(\pi, 1)$$

— пространство, у которого фундаментальная группа есть π, а остальные гомотопические группы тривиальны.

Для доказательства сначала рассмотрим группу $\pi_1 N$. Согласно Ван Кампену, эта группа порождена замкнутыми путями с началом и концом в отмеченной точке, состоящими из ребер, а соотношения порождаются 2-симплексами:



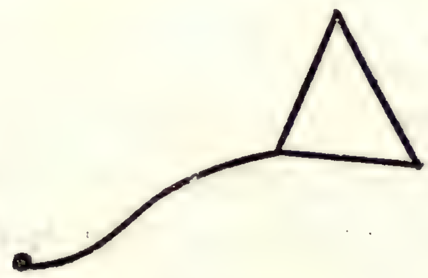
(см. П. Хилтон, С. Уайли, Теория гомологий, «Мир», М., 1966, § 6.3). Комплекс N имеет одну вершину (объект π). Элементы группы π определяют петли с началом и концом в этой вершине. Таким образом, указанное комбинаторное описание фундаментальной группы немедленно дает нужный изоморфизм

$$\pi \cong \pi_1 N.$$

Рассмотрим теперь симплексы комплекса N. Невырожденные n-симплексы в точности соответствуют наборам из n элементов группы π

$$\{(g_1, \ldots, g_n)\colon g_i \neq 1\}.$$

Следовательно, n-симплексы универсальной накрывающей $\tilde{N}$ комплекса N соответствуют парам, составленным из n-симплекса комплекса N и класса комбинаторных путей, соединяющих его с отмеченной точкой:



Таким образом, невырожденные n-симплексы комплекса $\tilde{N}$ соответствует парам, составленным из невырожденного n-симплекса в N и элемента группы π. Нетрудно проверить, что цепной комплекс, соответствующий рассматриваемой триангуляции $\tilde{N}$, совпадает с «бар-резольвентой группы π» (см. С. Маклейн, Гомология, «Мир», М., 1966). Таким образом, комплекс $\tilde{N}$ ацикличен, и так как он односвязен, то он стягиваем. Следовательно, N есть $K(\pi, 1)$.

Предыдущие два примера имеют общее обобщение, наличие которого представляется существенным топологическим фактом, предопределившим успех теории этальных когомологий.

Пример 3. Пусть $\mathcal{U}$ — локально направленное покрытие пространства X множествами вида $K(\pi, 1)$, т. е. $\pi_i U_\alpha = 0$, если $U_\alpha \in \mathcal{U}$ и $i > 1$. Рассмотрим «обобщенное этальное» покрытие пространства X универсальными накрывающими[1]) открытых множеств U_α,

$$\tilde{U}_\alpha \to X,$$

и рассмотрим, как и раньше, категорию «наименьших окрестностей». (Мы предполагаем, что для каждой точки $x \in X$ существует лишь конечное число элемен-

[1]) Сейчас мы допускаем бесконечные накрытия.

тов покрытия $\mathcal{U}$, содержащих x.) Отображениями служат коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} \widetilde{U}_\alpha \arrow[r] \arrow[dr] & \widetilde{U}_\beta \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd}$$

Оказывается, что *комплекс X гомотопически эквивалентен нерву категории $C(\mathcal{U})$.*

Отображение $X \to \{\text{нерв } C(\mathcal{U})\}$ построить в этом случае немного труднее, чем в примере 1. При этом удобно использовать стягиваемые «покрытия Чеха», измельчающие $\mathcal{U}$ (как в доказываемой ниже теореме 5.12).

Гомологическое доказательство можно извлечь из теоремы 2 цитированной выше статьи Лабкина.

Вместо того чтобы приводить точное доказательство, рассмотрим несколько характерных примеров. Они иллюстрируют геометрический смысл лабкинской конструкции этальных когомологий.

(i) (окружность S^1). Рассмотрим категорию, определяемую одним накрывающим отображением

$$\mathbb{R} \xrightarrow[\pi]{x \mapsto e^{ix}} S^1.$$

В этой категории $\mathbb{Z}$ есть один объект — π и бесконечное множество морфизмов — сдвиги прямой $\mathbb{R}$, согласованные с π. Нерв категории $\mathbb{Z}$ гомотопически эквивалентен $K(\mathbb{Z}, 1) = S^1$.

(ii) (двумерная сфера S^2). Пусть p и q — две различные точки на S^2. Рассмотрим категорию над S^2, определяемую отображениями:

(e) $\{S^2 - p\} \to S^2$,

(e') $\{S^2 - q\} \to S^2$,

($\mathbb{Z}$) $\{\text{универсальное накрытие над } S^2 - p - q\} \to S^2$.

Эта категория может быть описана так:

$$C \cong \{e \leftarrow \mathbb{Z} \to e'\},$$

причем каждый из объектов e, e' имеет единственный эндоморфизм — тождественный, в то время как $\mathbb{Z}$ имеет счетное множество эндоморфизмов — преобразо-

вания монодромии π^n, $-\infty < n < \infty$. Кроме того, существуют единственные морфизмы $\mathbb{Z} \to e$ и $\mathbb{Z} \to e'$.

Нерв подкатегории $\{\mathbb{Z}\}$ гомотопически эквивалентен окружности.

Нерв подкатегории $\{e\}$ стягиваем, и поэтому нерв подкатегории $\{\mathbb{Z}, e\} \subseteq C$ представляет собой конус над окружностью. Следовательно, нерв категории C получается склеиванием двух конусов над S^1 по S^1, т. е.

$$\text{нерв } C \cong S^2.$$

(iii) (трехмерная сфера S^3). Рассмотрим покрытие пространства $\mathbb{C}^2 - 0$ открытыми множествами

$$\begin{aligned} U_1 &= \{z_1 \neq 0\} \cong S^1, \\ U_2 &= \{z_2 \neq 0\} \cong S^1, \\ U_1 \cap U_2 &= \{z_1 \neq 0,\ z_2 \neq 0\} \cong S^1 \times S^1. \end{aligned}$$

Обозначим через C категорию, определяемую отображением универсальных накрытий этих открытых множеств в $\mathbb{C}^2 - \{0\}$. Категорию C можно описать диаграммой

$$\{\mathbb{Z} \xleftarrow{p_1} \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \xrightarrow{p_2} \mathbb{Z}\},$$

где p_1, p_2 — проекции. (Мы можем представлять себе элементы групп $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ и проекции p_1, p_2 как морфизмы категории C.)

Нерв категории C соответствует диаграмме пространств

$$\{S^1 \xleftarrow{p_1} S^1 \times S^1 \xrightarrow{p_2} S^1\},$$

соответствующей разбиению сферы S^3 в объединение двух полных торов с общей границей.

При этом естественному функтору

$$\{\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\} \to \{e \leftarrow \mathbb{Z} \to e'\}$$

соответствует отображение Хопфа

$$S^3 \xrightarrow{H} S^2.$$

(iv) (комплексная проективная плоскость). Рассмотрим три естественных открытых аффинных подмножества U_0, U_1, $U_2 \subset \mathbb{C}P^2$, задаваемых в однородных

координатах уравнениями $z_0 \neq 0$, $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$. Тогда множества U_i гомеоморфны $\mathbb{C}$, множества $U_i \cap U_j$ с $i \neq j$ гомеоморфны $(\mathbb{C}-0) \times \mathbb{C}$ и множество $U_0 \cap U_1 \cap U_2$ гомеоморфно $(\mathbb{C}-0) \times (\mathbb{C}-0)$. Категория C, соответствующая покрытию пространства $\mathbb{C}P^2$ универсальными накрывающими этих открытых множеств

$$
\begin{tikzcd}
 & & \tilde U_0 & & \\
 & \tilde U_0 \cap \tilde U_1 \arrow[ur] \arrow[ddl] & & \tilde U_0 \cap \tilde U_2 \arrow[ul] \arrow[ddr] & \\
 & & \tilde U_0 \cap \tilde U_1 \cap \tilde U_2 \arrow[ul, shift left] \arrow[ul, shift right] \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & & \\
\tilde U_1 & & \tilde U_1 \cap \tilde U_2 \arrow[ll] \arrow[rr] & & \tilde U_2
\end{tikzcd}
$$

может быть описана диаграммой

$$
\begin{tikzcd}
 & & e & & \\
 & \mathbb{Z} \arrow[ur] \arrow[ddl] & & \mathbb{Z} \arrow[ul] \arrow[ddr] & \\
 & & \mathbb{Z}+\mathbb{Z} \arrow[ul, "l_0"'] \arrow[ur, "l_1"] \arrow[d, "l_2"] & & \\
e & & \mathbb{Z} \arrow[ll] \arrow[rr] & & e
\end{tikzcd}
$$

в которой

$$l_0(a \oplus b) = a,$$

$$l_1(a \oplus b) = b,$$

$$l_2(a \oplus b) = a + b.$$

Таким образом, категория C является в некотором смысле конусом отображения Хопфа

$$\{e\} \leftarrow \left\{\begin{matrix} \mathbb{Z} \\ \uparrow \\ \mathbb{Z}+\mathbb{Z} \\ \downarrow \\ \mathbb{Z} \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} e \\ \uparrow \\ \mathbb{Z} \\ \downarrow \\ e \end{matrix}\right\}$$

и $\{\text{нерв } C\} = e^4 \cup_H S^2 \cong \mathbb{C}P^2$.

Заметим, что в категории C имеется инволюция, действующая на объектах как симметрия относительно l_2 и переводящая a в b.

Инвариантная подкатегория описывается диаграммой

$$\{e \leftarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}\},$$

и ее нерв является конусом отображения

$$S^1 \xrightarrow{\text{степень } 2} S^1,$$

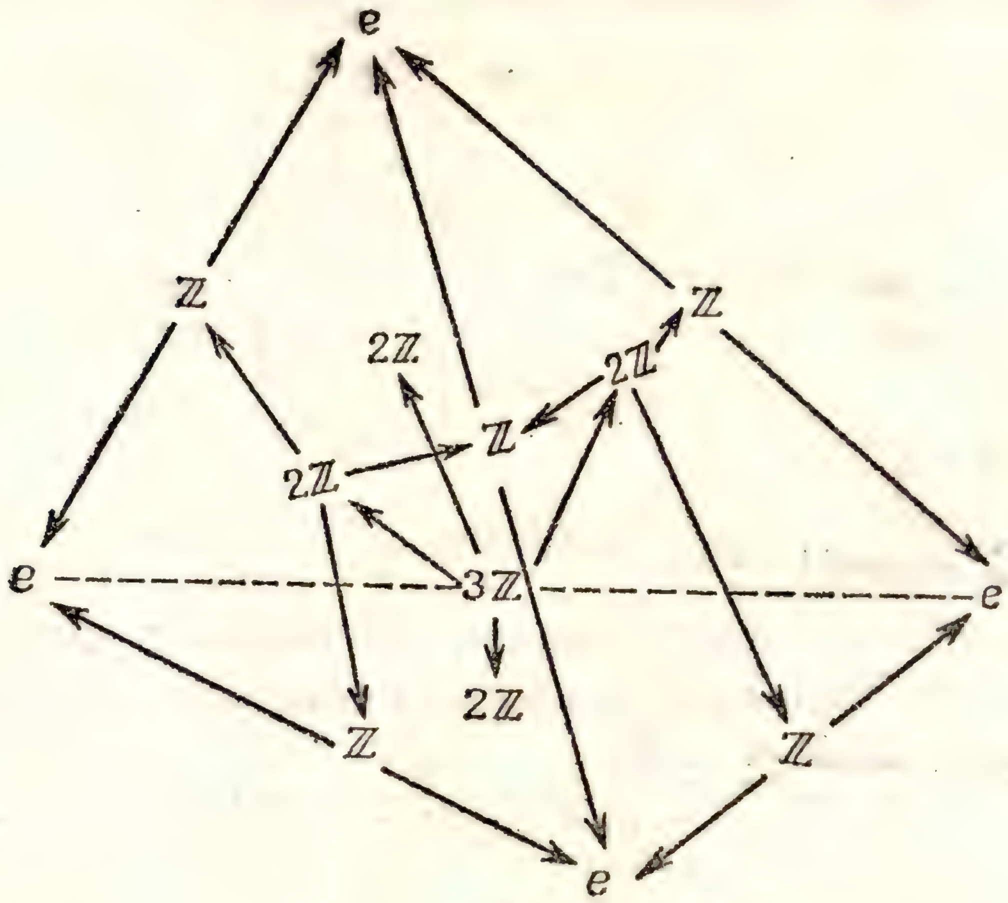
т. е. изоморфен вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$.

(v) (n-мерное комплексное проективное пространство). Рассмотрим категорию C, определяемую универсальными накрывающими пересечений стандартных открытых аффинных подмножеств пространства $\mathbb{C}P^n$,

$$U_i = \{(z_0, \ldots, z_n)\colon z_i \neq 0\}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Категорию C_n можно представлять как n-мерный симплекс σ, причем в центр каждой грани τ помещен объект α_τ, множество эндоморфизмов которого образует свободную абелеву группу с числом образующих,

равным размерности этой грани, например



Нерв категории C_n гомотопически эквивалентен $\mathbb{C}P^n$. Это разбиение пространства $\mathbb{C}P^n$ встречается в различных вопросах. Например:

(i) при рассмотрении $\mathbb{C}P^n$ как n-го шага милноровской конструкции классифицирующего пространства группы S^1:

$$\mathbb{C}P^n = \underbrace{S^1 * S^1 * \ldots * S^1}_{n}/S^1;$$

(ii) при рассмотрении динамической системы Фробениуса

$$(z_0, z_1, \ldots, z_n) \xrightarrow{\mathcal{F}_q} (z_0^q, z_1^q, \ldots, z_n^q)$$

на $\mathbb{C}P^n$; при итерации отображения $\mathcal{F}_q$ точки пространства $\mathbb{C}P^n$ ведут себя по-разному, смотря по тому, какому симплексу в диаграмме они принадлежат: предельные точки траектории лежат на торе, размерность которого равна размерности соответствующего симплекса.

Рассмотрим, например, $\mathbb{C}P^1$ как расширенную комплексную плоскость. При итерации отображения $z \to z^q$ точки, лежащие внутри единичного круга, стре-

мятся к его центру, точки, лежащие вне единичного круга, стремятся к бесконечности, а единичная окружность переходит в себя; это соответствует разбиению

$$S^2 = \mathbb{C}P^1 \cong \{e \leftarrow \mathbb{Z} \rightarrow e\}$$

(Джон Гукенхеймер). В общем случае (для произвольного n) категория, описывающая гомотопический тип пространства $\mathbb{C}P^n$, обладает естественными эндоморфизмами F_q, переводящими каждый объект в этот же объект и каждый эндоморфизм f любого объекта в f^q. (Заметим, что этими требованиями эндоморфизм F_q определен однозначно.) Геометрическая реализация этого эндоморфизма F_q индуцирует эндоморфизм пространства $\mathbb{C}P^n$, гомотопически эквивалентный $\mathcal{F}_q$.

Из разобранных примеров видно, что существуют простые категории, определяющие гомотопический тип многообразий

$$\mathbb{C}^1 - 0, \quad \mathbb{C}^2 - 0, \ldots \quad ; \quad \mathbb{C}P^1, \quad \mathbb{C}P^2, \ldots, \quad \mathbb{C}P^n, \ldots \quad .$$

Эти категории строятся по покрытиям многообразия открытыми по Зарисскому подмножествами с привлечением универсальных накрытий этих множеств. Указанные категории нельзя построить чисто алгебраически с помощью рассмотрения этальных покрытий многообразия V, так как алгебраические накрытия обязательно конечны. Но все же категории, соответствующие этальным покрытиям, «проконечно аппроксимируют» рассматривавшиеся выше категории.

Вернемся, например, к случаю $V = S^2 = \mathbb{C}P^1$. Вместо универсальных накрытий рассмотрим конечные накрытия:

$$\mathcal{U}_n = \begin{cases} S^2 - p \xrightarrow{\subseteq} S^2, \\ S^2 - q \xrightarrow{\subseteq} S^2, \\ S^2 - p - q \xrightarrow{\text{степень } n} S^2. \end{cases}$$

Категория $C(\mathcal{U}_n)$, соответствующая этому покрытию, описывается диаграммой

$$C(\mathcal{U}_n) \cong \{e \leftarrow \mathbb{Z}/n \rightarrow e\},$$

а ее нерв является надстройкой над бесконечномерным линзовым пространством $K(\mathbb{Z}/n, 1)$.

Рассмотрим проективную систему категорий

$$\begin{tikzcd}
& {} \arrow[dr] & & \\
{} \arrow[dr] & & C(\mathcal{U}_n) \arrow[dr] & \\
& C(\mathcal{U}_m) \arrow[ur] \arrow[dr] & & C(\mathcal{U}_k) \arrow[dl] \\
{} \arrow[ur] & & C(\mathcal{U}_l) &
\end{tikzcd}$$

(порядок соответствует делимости). Нервы этих категорий образуют проективную систему гомотопических типов с конечными гомотопическими группами

$$\{\text{надстройка над } K(\mathbb{Z}/n, 1)\}_n.$$

Так как рассматриваемые этальные покрытия гомотопически конфинальны в проективной системе всех этальных покрытий $\mathbb{C}P^1$, то построенная проективная система представляет этальный гомотопический тип сферы S^2.

Можно образовать теоретико-гомотопический предел [1])

$$\hat{X} = \varprojlim_n \{\text{надстройка над } K(\mathbb{Z}/n, 1)\}.$$

Используя методы гл. 3, нетрудно проверить, что

$$\tilde{H}_i\hat{X} \cong \varprojlim_n H_i\ \{\text{надстройка над } K(\mathbb{Z}/n, 1)\} =$$

$$= \begin{cases} \varprojlim_n (\mathbb{Z}/n) = \hat{\mathbb{Z}}, & \text{если } i = 2, \\ 0, & \text{если } i \neq 2. \end{cases}$$

Так как пространство $\hat{X}$ односвязно, оно представляет собой пополнение сферы S^2, которое, таким образом, может быть построено по этальным покрытиям $\mathbb{C}P^1$.

---

[1]) Нужно, как и в гл, 3, использовать наличие компактной топологии в функторах $[\ \ , \Sigma K(\mathbb{Z}/n, 1)]$.

Аналогичным образом можно построить проконечные пополнения рассмотренных выше многообразий, используя нервы категорий, соответствующих этальным покрытиям этих многообразий.

Для более общего комплексного алгебраического многообразия V Лабкин рассматривает все (локально направленные, конечные) этальные покрытия. После этого он рассматривает нервы категорий наименьших окрестностей, соответствующих этим покрытиям. Таким образом, он строит проективную систему гомотопических типов, с помощью которой можно восстановить проконечные пополнения гомотопического типа многообразия V.

Успех этой конструкции с топологической точки зрения вполне объясняется приведенными выше примерами и утверждением из примера 3. С алгебраической точки зрения решающую роль играют два факта:

(i) существует достаточно много открытых по Зарисскому множеств типа $K(\pi, 1)$[1];

(ii) категория конечных неразветвленных топологических накрытий над алгебраическим многообразием U изоморфна категории алгебраических неразветвленных накрытий над U.

Следующий набросок (восходящий к Лефшецу) содержит идею доказательства утверждения (i), которое было в более общем случае впервые доказано Артином.

Обозначим через K_n следующее утверждение:

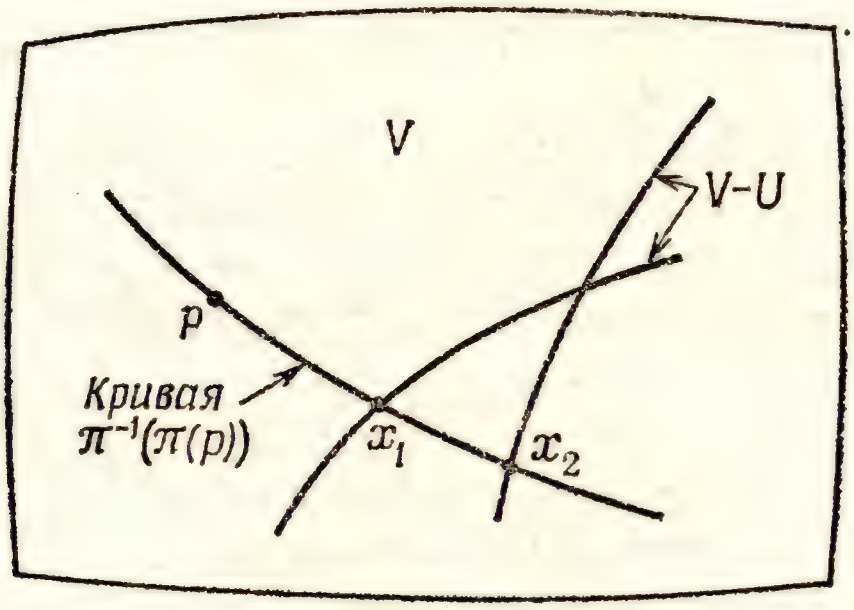
Пусть V^n — неособое n-мерное алгебраическое подмногообразие проективного пространства $\mathbb{C}P^N$, $U \subset V^n$ — открытое по Зарисскому множество и p — точка множества U. Тогда существует такое открытое по Зарисскому подмножество $U' \subset V^n$ типа $K(\pi, 1)$, что $p \in U' \subseteq U$.

Утверждение K_1 верно. Действительно, одномерное многообразие V^1 является римановой поверхностью и U есть V без конечного множества точек; следовательно, U есть пространство типа $K(\pi, 1)$.

[1]) Здесь и ниже, говоря «пространство типа $K(\pi, 1)$», мы не имеем в виду никакой определенной группы π, а подразумеваем просто пространство с асферической универсальной накрывающей. — *Прим. ред.*

Если в расслоении $F \to E \to B$ слой и база являются пространствами типа $K(\pi, 1)$, то, как это следует из точности гомотопической последовательности, пространство E тоже имеет тип $K(\pi, 1)$.

Предположим, по индукции, что утверждение K_{n-1} верно. Докажем, что утверждение K_n верно для всех n-мерных многообразий V. Пусть $U \subseteq V$ — открытое по Зарисскому множество и $p \in U$. Рассмотрим «общую» рациональную проекцию многообразия $\mathbb{C}P^N$ на $\mathbb{C}P^{n-1}$,



такую, что

(i) $\pi(p)$ есть регулярное значение отображения $\pi|_V$;

(ii) неособая риманова поверхность $C = \pi^{-1}(\pi(p))$ пересекает многообразие $V - U$ трансверсально в конечном множестве точек $x_1, \ldots, x_r$.

Рассмотрим окрестность W точки $\pi(p)$ в $\mathbb{C}P^{n-1}$ типа $K(\pi, 1)$, содержащуюся в образе множества тех точек, для которых справедливы утверждения (i) и (ii) с постоянным r. Открытое по Зарисскому множество $U' = \pi^{-1}W - (V - U) \subset U$ расслаивается над W со слоем риманова поверхность без r точек. Так как база и слой имеют тип $K(\pi, 1)$, то и U' имеет тип $K(\pi, 1)$.

Утверждение K_n доказано.

Что касается предложения (ii), то легко усматривается лишь, что всякое этальное отображение представляет собой конечнолистное накрытие. Обратное труднее; можно показать, что конечнолистная накрывающая обладает аналитической структурой и что

эта структура эквивалентна алгебраической в достаточном для вычисления $\hat{\pi}_1$ количестве случаев. Для $n=1$ это сделал Риман.

§ 2. ПОЛНЫЙ ЭТАЛЬНЫЙ ГОМОТОПИЧЕСКИЙ ТИП

Чтобы применить этальную гомотопическую теорию, мы переходим к пределу, используя компактность проконечных множеств (так же, как в гл. 3). В результате из проективной системы гомотопических типов, связанных с этальными покрытиями, мы получим единый гомотопический тип, который назовем «полным этальным гомотопическим типом» соответствующего алгебраического многообразия. В комплексном случае этот «полный этальный гомотопический тип» оказывается проконечным пополнением классического гомотопического типа соответствующего комплексного многообразия.

Мы рассмотрим (в односвязном случае) возникающий арифметический квадрат и подробно разберем примеры: вещественное грассманово многообразие и комплексное грассманово многообразие.

Пусть X — гомотопический тип комплексного алгебраического многообразия конечного типа или индуктивный предел таких гомотопических типов, как, например,

$$G_n(\mathbb{C}) = \lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} \text{многообразие } n\text{-мерных плоскостей} \\ \text{в } k\text{-мерном пространстве} \end{pmatrix}.$$

Если многообразие X нормально, то этальный гомотопический тип X представляет собой проективную систему CW-комплексов с конечными гомотопическими группами. Каждый из этих комплексов определяет представимый компактный функтор (см. гл. 3), и проективный предел этих функторов снова является компактным представимым функтором. Мы обозначим этот функтор через $\hat{X}$:

$$\begin{Bmatrix} \text{гомотопическая} \\ \text{категория} \end{Bmatrix} \xrightarrow{\hat{X}} \begin{Bmatrix} \text{категория компактных} \\ \text{хаусдорфовых пространств} \end{Bmatrix}.$$

Так как функтор $\hat{X}$ представим, то он однозначно определяет представляющий гомотопический тип (который мы тоже обозначим через $\hat{X}$)[1]).

Определение 5.2. Компактный представимый функтор $\hat{X}$

$$\left\{\begin{matrix}\text{гомотопическая}\\ \text{категория}\end{matrix}\right\} \xrightarrow[\substack{\text{этальные}\\ \text{покрытия}}]{\varprojlim [\ \ ,\ \text{нерв}]} \left\{\begin{matrix}\text{категория компактных хаус-}\\ \text{дорфовых прост-}\\ \text{ранств}\end{matrix}\right\}$$

вместе с представляющим гомотопическим типом $\hat{X}$ мы назовем *полным этальным гомотопическим типом* алгебраического многообразия X.

Теорема 5.2. *Пусть V — комплексное алгебраическое многообразие конечного типа. Тогда полный этальный гомотопический тип $\hat{V}$, определяемый равенством*

$$[\ \ ,\hat{V}] = \varprojlim_{\substack{\text{этальные}\\ \text{покрытия}}} [\ \ ,\ \text{нерв}],$$

эквивалентен проконечному пополнению классического гомотопического типа многообразия V.

Далее, (a) *целочисленные гомологии пространства $\hat{V}$ являются проконечным пополнением целочисленных гомологий многообразия V:*

$$\tilde{H}_i\hat{V} \cong (\tilde{H}_iV)\hat{\ };$$

(b) *если многообразие V односвязно, то гомотопические группы пространства $\hat{V}$ являются проконечными пополнениями соответствующих гомотопических групп многообразия V:*

$$\pi_i(\hat{V}) \cong (\pi_iV)\hat{\ };$$

[1]) Если нервы этальных покрытий имеют бесконечные гомотопические группы, то, прежде чем брать проективный предел, их надо пополнить.

(c) *в этом же односвязном случае гомотопический тип $\hat{V}$ разлагается в произведение своих р-адических компонент*:

$$\hat{V} \cong \prod_p \hat{V}_p;$$

(d) *топология на функторе $[\ \ , \hat{V}]$ определяется гомотопическим типом $\hat{V}$*.

Доказательство. Первое утверждение теоремы можно доказать, например, пополнив обе части соотношения Артина — Мазура между проективными системами гомотопических типов:

$$\{\text{этальный тип}\} = \left\{\begin{matrix}\text{проективная}\\ \text{система нервов}\end{matrix}\right\} \cong \{F\}_{\{f\}} \text{ (см. гл. 3)}.$$

Чтобы сделать это, мы привлекаем лемму из гл. 3, утверждающую, что проективный предел компактных представимых функторов всегда является компактным представимым функтором.

Поскольку проконечное пополнение гомотопического типа V определялось как обратный предел системы $\{F\}_{\{f\}}$, мы приходим к нашему утверждению. Соотношения между гомологиями и гомотопиями следуют из результатов гл. 3.

Замечание. В односвязном случае безразлично, используются ли при построении полного этального гомотопического типа прообъект Артина — Мазура или системы нервов Лабкина. Действительно, согласно результатам гл. 3, любое отображение односвязного пространства V в проективную систему пространств $\{X_i\}$, обладающее когомологическим свойством

$$H^*(V; A) \cong \varinjlim H^*(X_i; A),$$

где A конечно, позволяет построить проконечное пополнение пространства V:

$$\hat{V} \cong \varprojlim \hat{X}_i.$$

(Предположение об односвязности можно было бы отбросить, если бы мы могли доказать когомологический

изоморфизм для любой системы конечных локальных коэффициентов.)

Чтобы оценить информацию, содержащуюся в проконечном пополнении, рассмотрим арифметический квадрат

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\text{проконечное пополнение}"] \arrow[d, "\text{локализация}"'] & \hat{X} = \text{«проконечный тип } X\text{»} \arrow[d, "\text{локализация}"] \\ \text{«рациональный тип } X\text{»} = X_0 \arrow[r, "\text{формальное пополнение}"] & X_A \cong (X_0)^{-} \cong (\hat{X})_0 \end{tikzcd}$$

$$X_A \,\|\, \text{адельный тип } X$$

Если, например, $\hat{X}$ односвязно, то справедливы следующие утверждения:

(i) $\hat{X} \cong \prod_p \hat{X}_p$;

(ii) отображения гомотопических групп, индуцированные отображениями из «арифметического квадрата», имеют вид

$$\pi_* X \otimes \left\{ \begin{matrix} \mathbb{Z} \to \hat{\mathbb{Z}} \\ \downarrow \quad\; \downarrow \\ \mathbb{Q} \to \hat{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q} \end{matrix} \right\}.$$

Если группы $H^i(X; \mathbb{Z}/n)$ конечны при всех i и n, то топология на гомотопическом функторе

$$[\quad, \hat{X}]$$

определяется гомотопическим типом $\hat{X}$. В этом случае мы можем рассматривать пополнение $\hat{X}$ как гомотопический тип с дополнительным свойством — естественной топологией на функторе $[\quad, \hat{X}]$ (подобно тому, как топология в группе $\hat{\mathbb{Z}}$ определяется групповой структурой:

$$\hat{\mathbb{Z}} \cong \varprojlim (\hat{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Z}/n)).$$

(iii) Проблема восстановления классического гомотопического типа X по полному этальному гомотопическому типу $\widehat{X}$ является проблемой рациональной теории гомотопий, которая состоит в нахождении «подходящего вложения» рационального гомотопического типа X_0 в адельный гомотопический тип X_A:

$$X_0 \xrightarrow{i} X_A = (\widehat{X})_{\text{локализация в нуле}}.$$

Отображение i должно быть эквивалентно формальному пополнению (см. гл. 3). Если это так, то X гомотопически эквивалентно расслоенному произведению отображений i и l в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & & \hat{X} \arrow[d, "l"', "\text{локализация}"] & \\
X_0 \arrow[r, "\substack{\text{формальное}\\ \text{пополнение}}"] \arrow[rr, bend left, dashed, "i"] & (X_0)^{-} \arrow[r, phantom, "\cong", "\substack{\text{естественная}\\ \text{эквивалентность}}"'] & (\hat{X})_0 \arrow[r, phantom, "="] & \substack{\text{адельный}\\ \text{тип } X}
\end{tikzcd}$$

Заметим, что мы не охарактеризовали вложения i, а лишь потребовали, чтобы оно было указано. В рассматриваемых примерах этого будет достаточно.

Примеры. 1° (комплексный грассманиан). $X = \lim\limits_{k\to\infty} G_{n,k}(\mathbb{C}) = G_n(\mathbb{C})$, классифицирующее пространство унитарной группы BU_n.

(i) Проконечная вершина «арифметического квадрата» является «индуктивным пределом» полных этальных гомотопических типов (утолщенных) комплексных грассмановых многообразий

$$G_{n,k}(\mathbb{C}) \cong GL(n+k, \mathbb{C})/GL(n, \mathbb{C}) \times GL(k, \mathbb{C})\,[1].$$

---

[1]) Мы рассматриваем такую реализацию гомотопического типа комплексного грассманова многообразия, так как аналогичная реализация более удобна в вещественном случае.

Точнее, гомотопический тип $\widehat{X}$ представляется бесконечным телескопом отображений

$$\widehat{G}_{n,\,n}(\mathbb{C}) \to \widehat{G}_{n,\,n+1}(\mathbb{C}) \to \ldots .$$

Функтор $[\quad, \widehat{X}]$ определяется на конечных комплексах как индуктивный предел

$$\varinjlim_{k} [\quad, \widehat{G}_{n,\,k}(\mathbb{C})].$$

Так как почти все отображения в этой индуктивной системе являются изоморфизмами, то на пределе сохраняется компактная топология.

Для произвольных комплексов функтор $[\quad, \widehat{X}]$ определяется как проективный предел

$$\varprojlim\,[\text{конечные подкомплексы}, \widehat{X}].$$

(ii) Рациональная вершина «арифметического квадрата» есть произведение $\prod\limits_{i=1}^{n} K(\mathbb{Q}, 2i)$ пространств Эйленберга — Маклейна. Рациональные классы Чжэня определяют «локализацию в нуле»

$$BU_n \xrightarrow{(c_1,\, c_2,\, \ldots,\, c_n)} \prod_{i=1}^{n} K(\mathbb{Q}, 2i).$$

Это отображение индуцирует изоморфизм алгебр рациональных когомологий и, согласно теореме 2.1, является локализацией.

(iii) Для адельного гомотопического типа пространства X имеют место эквивалентности

$$X_A \cong \left\{ \begin{matrix} \text{формальное пополнение} \\ \text{локализации } BU_n \text{ в нуле} \end{matrix} \right\} \cong$$

$$\cong \{\text{локализация } (BU_n)\hat{}\ \text{ в нуле}\} \cong \prod_{i=1}^{n} K(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}, 2i)$$

(последнее произведение есть, очевидно, формальное пополнение произведения $\prod K(\mathbb{Q}, 2i)$).

Структура $\hat{\mathbb{Z}}$-модулей на гомотопических группах пространства X_A, определяемая частичной топологизацией функтора

$$[\quad, X_A],$$

совпадает с естественной $\hat{\mathbb{Z}}$-структурой на гомотопических группах пространства

$$\prod K(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}}, 2i).$$

(iv) Итак, мы получили расслоенный квадрат

$$\begin{array}{ccccc}
 & BU_n & \longrightarrow & \prod\limits_p \hat{X}_p = \left\{\begin{matrix}\text{полный этальный}\\ \text{тип}\end{matrix}\right\} & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
\left\{\begin{matrix}\text{рацио-}\\ \text{наль-}\\ \text{ный}\\ \text{тип}\end{matrix}\right\} = & \prod\limits_{i=1}^{n} K(\mathbb{Q}, 2i) & \longrightarrow & \prod\limits_{i=1}^{n} K(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}}, 2i) & = \left\{\begin{matrix}\text{адель-}\\ \text{ный}\\ \text{тип}\end{matrix}\right\}
\end{array}$$

2° (вещественный грассманиан). Рассмотрим комплексную ортогональную группу

$$O(n, \mathbb{C}) \subseteq GL(n, \mathbb{C}) =$$
$$= \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid (Ax, Ax) = (x, x)\},$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $(x, x) = \sum x_i^2$. Имеется диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
O(n, \mathbb{C}) & \xrightarrow{j} & GL(n, \mathbb{C}) \\
{\scriptstyle c}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle r} \\
O(n) & \xrightarrow{i} & GL(n, \mathbb{R}),
\end{array}$$

где j — вложение в категории комплексных алгебраических групп, i — вложение в категории вещественных алгебраических групп и c, r — вложения множества вещественных точек в множество комплексных точек.

Поскольку отображения c и i являются гомотопическими эквивалентностями, изучение вложения

$$GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{C})$$

эквивалентно, с точки зрения гомотопической теории, изучению вложения

$$O(n, \mathbb{C}) \to GL(n, \mathbb{C}).$$

Тот факт, что отображение i является гомотопической эквивалентностью, следует из однозначной представимости вещественной матрицы в виде произведения ортогональной матрицы на треугольную матрицу с положительными числами на диагонали. Тот факт, что отображение c является гомотопической эквивалентностью, следует из теоремы Шевалле [1]), утверждающей, что любая компактная группа Ли (в нашем случае $O(n)$) имеет *комплексную* алгебраическую форму (в нашем случае $O(n, \mathbb{C})$), гомеоморфную прямому произведению исходной компактной группы на евклидово пространство [2]).

Присоединяя условие $\det A = 1$, мы получаем специальную комплексную ортогональную группу $SO(n, \mathbb{C})$, которая является компонентой единицы в группе $O(n, \mathbb{C})$. Рассмотрим «алгебраическую форму» вещественного грассманова многообразия ориентированных плоскостей (опять-таки утолщенного)

$$\widetilde{G}_{n,k}(\mathbb{R}) = SO(n+k, \mathbb{C})/SO(n, \mathbb{C}) \times SO(k, \mathbb{C}).$$

Это — комплексное алгебраическое многообразие, гомотопически эквивалентное ориентирующей двулистной накрывающей вещественного грассманова многообразия

$$GL(n+k, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{R}) \times GL(k, \mathbb{R})\ ^{3)}.$$

Пусть $X = \lim\limits_{k \to \infty} \widetilde{G}_{n,k}(\mathbb{R}) = BSO_n$ — классифицирующее пространство специальной ортогональной группы.

---

[1]) См. Шевалле К., Теория групп Ли, т. I, ИЛ, М., 1948, гл. VI.

[2]) Поэтому можно применять этальную гомотопическую теорию к любой компактной группе Ли. Этим наблюдением я обязан Раулю Ботту.

[3]) Здесь неточность: это накрытие является ориентирующим только тогда, когда накрываемое многообразие неориентируемо, т. е. примерно в половине случаев; зато почти всегда это накрытие можно описать как универсальное. — *Прим. ред.*

Используя класс Эйлера и классы Понтрягина, мы можем, как и раньше, вычислить арифметический квадрат

$$\begin{array}{ccc} BSO_n & \longrightarrow & \prod\limits_p \hat{X}_p = \text{полный этальный тип} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left\{\begin{matrix}\text{рациональ-}\\ \text{ный тип}\end{matrix}\right\} = \prod\limits_{i \in S} K(\mathbb{Q}, i) & \rightarrow & \prod\limits_{i \in S} K(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}, i) = \text{«адельный тип»}, \end{array}$$

где

$$S = (4, 8, 12, \ldots, 2n - 4, n) \text{ при четном } n$$

и

$$S = (4, 8, 12, \ldots, 2n - 2) \text{ при нечетном } n.$$

§ 3. СИММЕТРИИ ГАЛУА В ГРАССМАНИАНАХ BU_n И BSO_n

Мы приступаем к изложению наиболее интересной части алгебраического аспекта этальных гомотопических типов.

Многообразия, которые мы рассматриваем, грассманианы $G_{n,k}(\mathbb{C})$ и $\tilde{G}_{n,k}(\mathbb{R})$, определены над полем рациональных чисел, так как коэффициенты уравнений, выделяющих многообразия $GL(n, \mathbb{C})$ и $O(n, \mathbb{C})$ (а также коэффициенты уравнений, задающих в них групповую структуру), рациональны и даже являются целыми числами.

Поэтому любой автоморфизм поля комплексных чисел оставляет неизменными эти коэффициенты и определяет алгебраический [1]) автоморфизм этих грассмановых многообразий. Каждый такой алгебраический автоморфизм определяет автоморфизм системы алгебраических покрытий, автоморфизм системы соответствующих нервов и, таким образом, автоморфизм полного этального гомотопического типа [2]).

---

[1]) Не обязательно непрерывный. — *Прим. ред.*

[2]) Точнее, автогомеоморфизм гомотопического функтора $[\ ,\hat{V}.]$

Опишем это действие неформально. Наше многообразие V построено из конечного числа аффинных многообразий A_i,

$$\mathbb{C}^n \supseteq A_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid f_{ji}(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ 0 \leqslant j \leqslant k\}.$$

Многообразия A_i склеиваются между собой по алгебраическим изоморфизмам между дополнениями к некоторым алгебраическим подмногообразиям. Высказывание, что многообразие V определено над полем рациональных чисел, означает, что коэффициенты уравнений $f_{ji} = 0$ и коэффициенты полиномов, определяющих склеивающие изоморфизмы, являются рациональными числами.

Пусть σ: $z \longmapsto z^\sigma$ — автоморфизм поля $\mathbb{C}$. Он индуцирует алгебраический автоморфизм пространства $\mathbb{C}^n$:

$$(z_1, \ldots, z_n) \longmapsto (z_1^\sigma, \ldots, z_n^\sigma).$$

Так как всякий автоморфизм поля $\mathbb{C}$ оставляет на месте рациональные числа[1]), то σ сохраняет множества решений уравнений $f_{ji}(z_1, \ldots, z_n) = 0$, определяющих аффинные схемы A_i, и согласован с их склеиванием в многообразие V. Поэтому корректно определен алгебраический автоморфизм

$$V \xrightarrow{\sigma} V.$$

Опишем теперь действие автоморфизма σ на системе «нервов этальных покрытий».

Пусть $\mathcal{U}$ — этальное покрытие многообразия V

$$\begin{tikzcd} \ldots U_\alpha \arrow[dr, "\pi_\alpha"'] & U_{\alpha'} \arrow[d, "\pi_{\alpha'}"] & U_{\alpha''} \ldots \arrow[dl, "\pi_{\alpha''}"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

Каждое отображение π_α является конечным алгебраическим неразветвленным накрытием над дополнением к алгебраическому подмногообразию многообразия V;

[1]) Я думаю, что есть какая-то аналогия между «неподвижностью» поля $\mathbb{Q}$ и «инертностью» стабильного послойного гомотопического типа (см. гл. 4).

при этом образы π_α покрывают V. Рассмотрим «прообразы» отображений π_α относительно автоморфизма σ:

$$\begin{array}{ccc} V \times U_\alpha \supseteq \sigma^* U_\alpha & \xrightarrow{\sigma^*} & U_\alpha \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \sigma^*\pi_\alpha} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_\alpha} \\ V & \xrightarrow{\sigma} & V \end{array}$$

$$\sigma^* U_\alpha = \{(v, u)\colon\ \sigma(v) = \pi_\alpha(u)\}.$$

Они составляют новое этальное покрытие многообразия V,

$$\sigma^* \mathcal{U} = \{\sigma^* U_\alpha \to V,\ \pi_\alpha \in \mathcal{U}\}.$$

Таким образом, формула $\mathcal{U} \longmapsto \sigma^* \mathcal{U}$ определяет автоморфизм множества этальных покрытий, используемого при построении этального типа в качестве индексирующего множества. Далее, имеется естественный изоморфизм категорий, определяемых покрытиями $\mathcal{U}$ и $\sigma^* \mathcal{U}$,

$$C(\sigma^* \mathcal{U}) \xrightarrow{\sigma} C(\mathcal{U}).$$

Он задается формулами

$$(\sigma^* U_\alpha) \longmapsto U_\alpha,$$
$$\left(\sigma^* U_\alpha \xrightarrow{f} \sigma^* U_\beta\right) \longmapsto \left(U_\alpha \xrightarrow{\sigma_* f} U_\beta\right),$$

где отображение $\sigma_* f$ определяется условием, чтобы диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \sigma^* U_\alpha & \xrightarrow{\sigma^*} & U_\alpha \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \sigma_* f} \\ \sigma^* U_\beta & \xrightarrow{\sigma^*} & U_\beta \end{array}$$

была коммутативна. Таким образом, σ индуцирует автоморфизм проективной системы категорий $\{C(\mathcal{U})\}$:

$$\mathcal{U} \longmapsto \sigma^* \mathcal{U},$$
$$\{\sigma\colon\ C(\sigma^* \mathcal{U}) \to C(\mathcal{U})\}$$

и автоморфизм проективной системы нервов:

$$\mathcal{U} \longmapsto \sigma^*\mathcal{U},$$
$$\{\text{нерв } C(\sigma^*\mathcal{U}) \to \text{нерв } C(\mathcal{U})\}.$$

Переходя к пределу, мы получаем автоморфизм

$$\hat{V} \xrightarrow{\sigma} \hat{V}$$

проконечного пополнения гомотопического типа многообразия V.

Замечание (общая функториальность). В нашем случае отображение σ (а следовательно, и σ^*) является изоморфизмом, и потому ясно, что отображение $\sigma_* f$ существует и однозначно определено.

Если же σ — более общий морфизм, скажем включение подмногообразия W в многообразие V, то при построении отображения σ: $\hat{W} \to \hat{V}$ решающую роль играет техника «наименьших окрестностей». Объекты категории $C(\mathcal{U})$ были фактически «наименьшими окрестностями» (см. пример 1 в предыдущем параграфе), построенными по локально конечному локально направленному покрытию $\mathcal{U}$. Покрытие $\sigma^*\mathcal{U}$ тоже является локально конечным и локально направленным, поэтому оно имеет свои «наименьшие окрестности», и последние являются объектами категории $C(\sigma^*\mathcal{U})$. Можно проверить, что из включения $\sigma^*U_\alpha \subseteq \subseteq \sigma^*U_\beta$, где σ^*U_α, σ^*U_β — «наименьшие окрестности» в W точек ω_α, $\omega_\beta \in V$, следует включение $U_{\omega_\alpha} \subseteq U_{\omega_\beta}$, где U_{ω_α}, U_{ω_β} — «наименьшие окрестности» в U точек ω_α, ω_β. Поэтому формула

$$\sigma^*U_\alpha \longmapsto U_{\omega_\alpha}$$

определяет функтор

$$C(\sigma^*U) \to C(U)\,[1].$$

---

[1]) Для краткости мы считаем, что рассматриваются обычные покрытия.

Хотя этот функтор не каноничен, индуцированное отображение нервов определено однозначно с точностью до гомотопии, как в теории Чеха.

Лабкин придумал, как, несколько усложнив вычисления, можно добиться каноничности уже на уровне нервов. Мы используем его метод ниже, при доказательстве «гипотезы о вещественных многообразиях».

Пример. $V = (\mathbb{C} - 0)$. Для описания этального гомотопического типа в этом случае достаточно рассмотреть покрытия $\{U_n\}$, состоящие из одного элемента

$$\pi\colon U_n \xrightarrow{n\text{-листное накрытие}} (\mathbb{C} - 0).$$

Соответствующая категория $C(\{U_n\})$ есть однообъектная категория $\mathbb{Z}/n$, в которой автоморфизмы единственного объекта образуют циклическую группу порядка n.

Заметим теперь, что накрытие $\pi\colon U_n \to (\mathbb{C} - 0)$ эквивалентно накрытию $F_n\colon (\mathbb{C} - 0) \to (\mathbb{C} - 0)$, где F_n — возведение в n-ю степень, и что

$$\begin{array}{ccc} \sigma^* U_n & \xrightarrow{\sigma^*} & U_n \\ {\scriptstyle \sigma^*\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ (\mathbb{C} - 0) & \xrightarrow{\sigma} & (\mathbb{C} - 0) \end{array} \quad \cong \quad \begin{array}{ccc} (\mathbb{C} - 0) & \xrightarrow{\sigma} & (\mathbb{C} - 0) \\ \big\downarrow{\scriptstyle F_n} & & \big\downarrow{\scriptstyle F_n} \\ (\mathbb{C} - 0) & \xrightarrow{\sigma} & (\mathbb{C} - 0) \end{array}$$

Автоморфизмы накрытия π соответствуют умножению на корни n-й степени из единицы: $f_\xi(z) = \xi z$, $\xi^n = 1$. Так как отображение $\sigma_* f_\xi$ определяется диаграммой

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C} - 0) & \xrightarrow{\sigma} & (\mathbb{C} - 0) \\ {\scriptstyle f_\xi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \sigma_* f_\xi} \\ (\mathbb{C} - 0) & \xrightarrow{\sigma} & (\mathbb{C} - 0) \end{array}$$

или формулой $(\sigma_* f_\xi)(z^\sigma) = (f_\xi(z))^\sigma$, то

$$\sigma_* f_\xi(z) = \left(f_\xi\left(z^{\sigma^{-1}}\right)\right)^\sigma = \left(\xi \cdot \left(z^{\sigma^{-1}}\right)\right)^\sigma = \xi^\sigma \cdot z,$$

или $\sigma_* f_\xi = f_\xi \sigma$.

Если отождествить единственный объект категории $C(\{U_n\})$ с группой корней n-й степени из единицы (эндо-

морфизмы-сдвиги), то автоморфизмы поля $\mathbb{C}$ действуют на этой категории посредством своего действия на корнях из единицы,

$$\xi \mapsto \xi^{\sigma}, \quad \xi^{n} = 1.$$

Мы видим, что действие элемента $\sigma \in \operatorname{Aut} \mathbb{C}$ на этальном гомотопическом типе многообразия $\mathbb{C} - 0$ зависит лишь от действия элемента σ на корнях из единицы. В общем случае это неверно[1]), но все же оказывается, что для произвольного $\mathbb{Q}$-многообразия V действие элемента $\sigma \in \operatorname{Aut} \mathbb{C}$ на этальном гомотопическом типе V зависит лишь от действия σ на алгебраических числах. Дело в том, что поле $\tilde{\mathbb{Q}}$ алгебраических чисел и поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел оба являются алгебраически замкнутыми полями, содержащими $\mathbb{Q}$, и с точки зрения этальных гомотопий при переходе от поля $\tilde{\mathbb{Q}}$ к полю $\mathbb{C}$ ничего не меняется.

В силу сказанного выше «группа Галуа поля $\mathbb{Q}$», $\operatorname{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, естественно действует на проконечном пополнении гомотопических типов грассманианов $G_{n,k}(\mathbb{C})$ и $G_{n,k}(\mathbb{R})$. [Многообразие $G_{n,k}(\mathbb{R})$ определяется у нас как $O(n+k, \mathbb{C})/O(n, \mathbb{C}) \times O(k, \mathbb{C})$.] Наличие такого действия является совершенно неожиданным. Ведь все автоморфизмы поля $\tilde{\mathbb{Q}}$ (кроме комплексного сопряжения) делаются очень разрывными при переходе к комплексному полю. Поэтому априори совершенно неясно, почему эти автоморфизмы должны действовать на группах когомологий $\operatorname{mod} n$ алгебраических $\mathbb{Q}$-многообразий[2]).

Сделаем еще несколько замечаний о действии группы Галуа.

(i) Многие многообразия нельзя определить над $\mathbb{Q}$, но они определены над некоторым числовым полем — конечным расширением поля $\mathbb{Q}$. Для многообразия V, определенного над полем $\mathbb{K}$, на этальном гомотопическом типе (проконечном пополнении) многообразия V

---

[1]) Для грассманианов это неизвестно. Некоторые частные результаты см. в § 5.

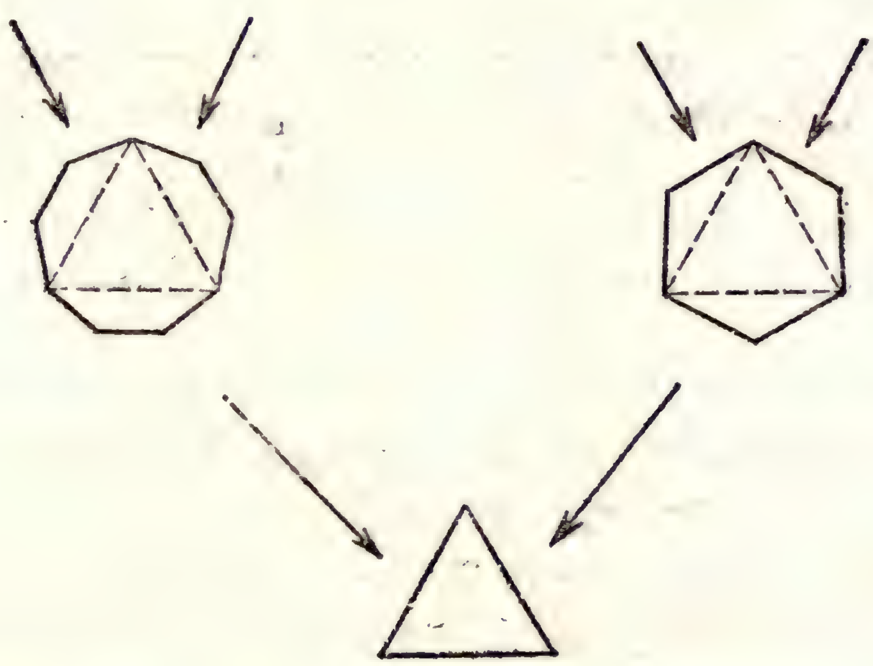
[2]) Я благодарен Г. Уошнитцеру, который уже давно разъяснил мне это явление.

действует подгруппа конечного индекса группы Галуа поля $\mathbb{Q}$,

$$\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{K}) \subseteq \mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}).$$

(ii) Действия этих проконечных групп Галуа непрерывны по отношению к естественной топологии в гомотопических множествах $[\ \ ,\hat{V}]$. Например, если V есть $\mathbb{Q}$-многообразие, то каждое конечное этальное покрытие определено над конечным расширением поля $\mathbb{Q}$, т. е. составляющие его многообразия и отображения локально задаются полиномами с коэффициентами из некоторого числового поля L. Поэтому проконечная группа Галуа действует через свой конечный фактор $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ и обратный предел этих действий дает гомеоморфизмы проконечного гомотопического множества $[\ \ ,\hat{V}]$.

(iii) Следствием этого феномена «конечности на каждом уровне» является существование конфинального семейства этальных покрытий, каждое из которых в отдельности инвариантно относительно группы Галуа. Мы получаем, таким образом, замечательную модель действия группы Галуа на проконечном пополнении — бесконечную систему конечных комплексов с конечными группами симметрий, причем все эти симметрии согласованы.



Действие группы Галуа в когомологиях. Группа Галуа $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ действует на группе μ корней из единицы, содержащейся в $\tilde{\mathbb{Q}}$. Как известно, полная группа

автоморфизмов группы μ изоморфна группе $\hat{\mathbb{Z}}^*$ обратимых элементов кольца $\hat{\mathbb{Z}}$[1]). Действие группы $\hat{\mathbb{Z}}^*$ на μ задается формулой

$$\xi \mapsto \xi^a \quad (\xi^n = 1, \quad a \in \hat{\mathbb{Z}}^*)$$

(под ξ^a мы понимаем ξ^k, где k — любое целое число, сравнимое по модулю n с $a \in \hat{\mathbb{Z}}^*$). Поэтому определен канонический гомоморфизм

$$\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \left\{ \begin{array}{c} \text{группа Галуа поля,} \\ \text{порожденного корнями} \\ \text{из единицы} \end{array} \right\} \subseteq \hat{\mathbb{Z}}^*.$$

Из теории полей классов для $\mathbb{Q}$ следует, что отображение A является эпиморфизмом и его ядро совпадает с коммутатором группы $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, т. е. A есть не что иное, как абелеанизация.

Эта абелеанизация естественно возникает также при рассмотрении этального гомотопического типа $\mathbb{C}P^1$.

Предложение 5.3. *Индуцированное действие группы* $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *в*

$$H_2((\mathbb{C}P^1)\hat{}\,;\ \mathbb{Z}) \cong \hat{\mathbb{Z}}$$

совпадает (после абелеанизации) с естественным действием группы $\hat{\mathbb{Z}}^*$ *на* $\hat{\mathbb{Z}}$.

Доказательство. Рассмотрим накрытие $U_n \to \to \mathbb{C}P^1$,

$$U_n = \mathbb{C}^* \xrightarrow{z \mapsto z^n} \mathbb{C}^* = (\mathbb{C} - 0) \subseteq \mathbb{C}P^1.$$

Группа монодромий этого накрытия порождается отображением $z \mapsto \xi z$, где $\xi^n = 1$.

Пусть σ — какой-нибудь автоморфизм поля $\tilde{\mathbb{Q}}$. Как это мы видели недавно при рассмотрении примера

[1]) Этот факт легко проверить, используя изоморфизмы

$$\mu \cong \varinjlim_n \mathbb{Z}/n, \qquad \hat{\mathbb{Z}}^* \cong \varprojlim_n (\mathbb{Z}/n)^*.$$

(см. стр. 177), действие элемента σ на категории $C(\{U_n\})$ соответствует его действию на корнях из единицы. Мы применяем это наблюдение к системе этальных покрытий проективной прямой $\mathbb{C}P^1$:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{C}^* \ \text{дополнение к } p \text{ и } q \arrow[dl] \arrow[dd, "\text{степень } n"] \arrow[dr] & \\
\text{дополнение к } q \ \mathbb{C} \arrow[dr] & & \mathbb{C} \ \text{дополнение к } p \arrow[dl] \\
& P^1\mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

и соответствующей системе категорий $\{C_n\}$:

$$C_n = \{e \leftarrow \mathbb{Z}/n \rightarrow e\}$$

Автоморфизм, определяемый σ на всей системе этальных покрытий $\mathbb{C}P^1$, «гомотопен» автоморфизму конфинальной подсистемы $\{C_n\}$. Проведенные выше вычисления показывают, что автоморфизм σ^* категории $\{C_n\}$

(i) является тождественным на объектах;

(ii) действует на морфизме $\xi \in \mathbb{Z}/n$ по формуле $\xi \rightarrow \xi^\sigma$.

Нерв категории C_n является надстройкой над $K(\mathbb{Z}/n, 1)$, и его двумерные целочисленные гомологии равны $\mathbb{Z}/n$.

Действие элемента σ на проективном пределе

$$H_2((\mathbb{C}P_1)^{\wedge}; \mathbb{Z}) = \varprojlim_n H_2(\text{надстройка над } K(\mathbb{Z}/n, 1); \mathbb{Z}) =$$
$$= \varprojlim_n \mathbb{Z}/n = \hat{\mathbb{Z}}$$

этих гомологических групп составляется из его действий на корнях n-й степени из единицы. Предложение доказано.

Замечание. С философской точки зрения важно, что *алгебраическое многообразие* $\mathbb{C}P^1$ не имеет канонического фундаментального класса, так как алгебраические автоморфизмы переставляют между собой все образующие группы $H_2((\mathbb{C}P^1)^\wedge; \mathbb{Z})$.

Топология в поле комплексных чисел определяет выбор ориентации с точностью до знака. Выбор квадратного корня из -1 позволяет определить и знак.

С другой стороны, как мы увидим в следующей главе, фиксация для проконечного гомотопического типа, удовлетворяющего двойственности Пуанкаре, ориентации в смысле K-теории соответствует «классу гомеоморфизмов неособых топологических структур» на этом гомотопическом типе[1]).

В случае сферы S^2 «ориентация, индуцирующая топологию», в точности соответствует выбору образующей в двумерной гомологической группе.

Предложение 5.4. *Действие группы* $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *в*

$$H^*((\mathbb{C}P^n)^\wedge; \hat{\mathbb{Z}}) \cong \hat{\mathbb{Z}}[x]/(x^{n+1} = 0)$$

совпадает (*после абелеанизации*) *с естественным действием группы* $\hat{\mathbb{Z}}^*$, *т. е.* (*произвольная*) *двумерная образующая* x *алгебры* $H^*((\mathbb{C}P^n)^\wedge; \hat{\mathbb{Z}})$ *переходит под действием элемента* $a \in \hat{\mathbb{Z}}^*$ *в* ax.

Доказательство. При $n = 1$ это следует из предложения 5.3, поскольку

$$H^2((\mathbb{C}P^1)^\wedge; \hat{\mathbb{Z}}) = \mathrm{Hom}(H_2(\mathbb{C}P^1)^\wedge; \hat{\mathbb{Z}}).$$

В общем случае утверждение вытекает, ввиду наличия включения

$$\mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^n,$$

из естественности действия группы Галуа.

[1]) В действительности дело обстоит столь благополучно лишь в односвязном случае, локализованном вне двойки (чтобы задать «топологический тип» в двойке, нужно фиксировать коечто еще).

Предложение 5.5. *Группа* $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *действует на алгебре*

$$H^*((BU_n)^{\wedge};\ \hat{\mathbb{Z}}) = \hat{\mathbb{Z}}[c_1, c_2, \ldots, c_n]$$

по формуле $a(c_i) = a^i c_i \quad (a \in \hat{\mathbb{Z}}^*)$.

Доказательство. При $n=1$ это вытекает из предложения 5.4, поскольку

$$BU_1 = \mathbb{C}P^\infty = \varprojlim_n \mathbb{C}P^n.$$

В общем случае достаточно заметить, что при естественном отображении

$$\underbrace{\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty}_{n \text{ раз}} \to BU_n$$

классы Чжэня переходят в элементарные симметрические функции от двумерных образующих алгебр когомологий сомножителей [1]).

Предложение 5.6. *Действие группы* $\mathrm{Gal}(\hat{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *в* $H^*((BSO_n)^{\wedge};\ \hat{\mathbb{Z}})$ *определяется следующими условиями:*

(i) *в* $H^*(BSO_n;\ \mathbb{Z}/2)$ *действие тривиально;*

(ii) *если элемент* g *группы* $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *переходит при абелеанизации в* $a \in \hat{\mathbb{Z}}^*$, *то*

$$g(p_i) = a^{2i} p_i \qquad (\dim p_i = 4i),$$
$$g(\chi) \to a^n \chi \qquad (\dim \chi = 2n),$$

где p_i — *классы Понтрягина и* χ — *класс Эйлера; напомним, что (по модулю элементов порядка* 2)

$$H^*((BSO_{2n+1})^{\wedge};\ \hat{\mathbb{Z}}) \cong \hat{\mathbb{Z}}[p_1, \ldots, p_n],$$
$$H^*((BSO_{2n})^{\wedge};\ \hat{\mathbb{Z}}) \cong \hat{\mathbb{Z}}[p_1, \ldots, p_n, \chi]/(\chi^2 = p_n).$$

---

[1]) Этот факт, как и используемые ниже сведения о когомологиях пространств BSO и гомоморфизмах, связывающих когомологии пространств BSO, BU и проективных пространств, содержится в статье А. Бореля «Когомологии главных расслоенных пространств и однородных пространств компактных групп Ли», сб. «Расслоенные пространства», ИЛ, М., 1958. Конечно, у Бореля рассматриваются целочисленные когомологии; переход к $\hat{\mathbb{Z}}$-когомологиям производится с помощью формулы универсальных коэффициентов. — *Прим. ред.*

Доказательство. Заметим, что у алгебры

$$H^*(\mathbb{R}P^n;\ \mathbb{Z}/2) = (\mathbb{Z}/2)[x]/(x^{n+1} = 0)$$

нет нетривиальных автоморфизмов, и рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & & BSO_n \\ & & \downarrow \\ \underbrace{\mathbb{R}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{R}P^\infty}_{n} & \to & BO_n \end{array}$$

составленную из «алгебраических» морфизмов. Так как горизонтальное отображение индуцирует вложение $\mathbb{Z}/2$-когомологий, а вертикальное — эпиморфизм, то утверждение (i) доказано.

Для доказательства утверждения (ii) рассмотрим диаграммы

$$BSO_{2n+1} \xrightarrow[\text{комплексификация}]{c_-} BU_{2n+1},$$

$$\underbrace{BSO_2 \times \ldots \times BSO_2}_{n} \xrightarrow{l} BSO_{2n} \xrightarrow[\text{комплексификация}]{c_+} BU_{2n}.$$

По модулю элементов порядка 2 отображение c_- индуцирует в когомологиях эпиморфизм, а c_+ — эпиморфизм на подалгебру, порожденную элементами $p_1, \ldots, p_n \in H^*(BSO_{2n})$. Так как, далее, l индуцирует в $2n$-мерных когомологиях мономорфизм, то утверждение (ii) следует из предложения 5.5.

Замечание. Столь хорошее действие группы Галуа $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ в когомологиях связано с некоторыми интересными проблемами и гипотезами.

Для каждого простого числа p в группе $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ имеется подмножество, состоящее из элементов, индуцирующих автоморфизм Фробениуса $x \mapsto x^p$ в поле характеристики p. Пусть $\mathcal{F}_p$ — один из таких элементов.

В случае грассманиана элемент $\mathcal{F}_p$ действует на q-адической части когомологий ($q \neq p$) по формуле

$$c_i \mapsto p^i c_i \qquad [c_i \in H^{2i}(\ ;\ \hat{\mathbb{Z}}_q)].$$

Знаменитая гипотеза Римана в характеристике p — оставшаяся недоказанной гипотеза Вейля[1]) — утверждает, что для широкого класса многообразий[2]) элемент $\mathscr{F}_p$ действует на когомологиях «аналогичным образом». Рассмотрим собственные значения (в алгебраическом замыкании поля $\hat{\mathbb{Q}}_q$, содержащем $\hat{\mathbb{Z}}_q$) оператора $\mathscr{F}_p$ в q-адической части k-мерных когомологий пространства $\hat{V}$. Эти собственные значения

(a) являются целыми алгебраическими числами;
(b) не зависят от $q \neq p$;
(c) по модулю равны $p^{k/2}$.

В случае грассмановых многообразий есть только четномерные когомологии и собственные значения являются обычными целыми числами (p^i, если $k = 2i$). Это упрощение возникает из-за того, что когомологии грассманова многообразия порождаются алгебраическими циклами (как над полем характеристики нуль, так и над полем характеристики p) — подмногообразиями Шуберта Sch^k (k — комплексная размерность). Используя естественность действия группы Галуа в гомологиях, мы находим, что $\mathscr{F}_p(i_* \mathrm{Sch}^k) = i_* \mathscr{F}_p \mathrm{Sch}^k = i_* p^k \mathrm{Sch}^k = p^k i_* \mathrm{Sch}^k$, где i — включение (второе равенство следует из того, что старшая группа гомологий многообразия Шуберта Sch^k является циклической, и потому собственное значение может быть найдено в окрестности точки).

Тейт предположил, что справедливо обратное утверждение. Говоря несколько неточно, он предположил, что каждый собственный вектор оператора $\mathscr{F}_p$ в $\hat{\mathbb{Z}}_q$-когомологиях с рациональным собственным значением соответствует алгебраическому подмногообразию (над полем характеристики p).

---

[1]) Она теперь доказана Делинем (Deligne P.). — *Прим. перев.*

[2]) А именно, для многообразий, имеющих хорошую редукцию $\bmod p$.

§ 4. ДЕЙСТВИЕ ГРУППЫ ГАЛУА В K-ТЕОРИИ, ОПЕРАЦИИ АДАМСА И «ЛИНЕЙНАЯ» ГИПОТЕЗА АДАМСА

Так как группа $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ действует на $(BU_n)^\wedge$ и $(BO_n)^\wedge$, она действует и на гомотопических типах

$$BU^\wedge = \varinjlim (BU_n)^\wedge,$$
$$BO^\wedge = \varinjlim (BO_n)^\wedge.$$

Эти гомотопические типы классифицируют теоретико-групповые проконечные пополнения приведенных K-теорий,

$$\tilde{K}U(X)^\wedge \cong [X, BU^\wedge],$$
$$\tilde{K}O(X)^\wedge \cong [X, BO^\wedge],$$

для любого конечного комплекса X.

Если комплекс X бесконечен, то мы полагаем

$$\tilde{K}U(X)^\wedge = \varprojlim_{\substack{\text{конечные} \\ \text{подкомплексы } X_\alpha \\ \text{комплекса } X}} \tilde{K}U(X_\alpha)^\wedge = [X, BU^\wedge]\,^{1)}.$$

Поэтому для любого пространства X группа $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ естественно действует в проконечном K-функторе $K(X)^\wedge$ (вещественном или комплексном).

В обычной K-теории имеются прекрасные операции Адамса [2])

$$\psi^k\colon\ KU(X) \to KU(X),$$
$$\psi^k\colon\ KO(X) \to KO(X)$$

---

[1]) Последнее равенство является следствием проконечности гомотопических групп пространства $BU^\wedge$. — *Прим. ред.*

[2]) Определение операций Адамса и их первоначальное изучение имеется в статье Дж. Адамса «Векторные поля на сферах», сб. *Математика*, 7: 6 (1963), 49—79. — *Прим. ред.*

($k \in \mathbb{Z}$). Операции Адамса (как в вещественном, так и в комплексном случае) обладают следующими свойствами:

(i) если η — геометрическое линейное расслоение, то $\psi^k(\eta) = \eta^k = \eta \otimes \ldots \otimes \eta$ (k сомножителей);

(ii) ψ^k определяет эндоморфизм кольца $K(X)$;

(iii) $\psi^k \circ \psi^l = \psi^{kl}$.

Операции ψ^k определяются с помощью полиномов Ньютона от внешних степеней векторных расслоений. Например,

$$\begin{aligned} &\psi^1 V = \Lambda^1 V = V, \\ &\psi^2 V = V \otimes V - 2\Lambda^2 V, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Операции Адамса естественно определяют операции в проконечной K-теории:

$$K(X)\hat{} \xrightarrow{(\psi^k)\hat{}} K(X)\hat{}$$

для конечных комплексов и

$$\varprojlim_a K(X_a)\hat{} \xrightarrow{\varprojlim (\psi^k)\hat{}} \varprojlim_a K(X_a)\hat{}$$

для бесконечных комплексов.

Я хотел бы разбить эти проконечные операции Адамса на «изоморфическую часть» и «нильпотентную часть».

Алгебра $K(X)\hat{}$ и операции Адамса естественно разлагаются в произведение

$$\prod_p K(X)\hat{_p} \xrightarrow{\prod_p (\psi^k)\hat{_p}} \prod_p K(X)\hat{_p},$$

причем операция $(\psi^k)\hat{_p}$ является изоморфизмом в том и только в том случае, когда p не делит k. Если p делит k, то переопределим операцию $(\psi^k)\hat{_p}$, сделав ее тождественным отображением. Мы получим операцию

$$K(X)\hat{} \xrightarrow[\cong]{\psi^k} K(X)\hat{},$$

которая и является, по определению, «изоморфической частью» операции Адамса.

Заметим, что (до переопределения) операции $(\psi^k)\hat{}_p$ при p, делящем k, были топологически нильпотентны, т. е. степени операции $(\psi^k)\hat{}_p$ в приведенной группе $\tilde{K}(X)\hat{}$ стремились к нулю.

Наша главная цель состоит теперь в том, чтобы выявить «вездесущий характер» изоморфической части операций Адамса.

Напомним, например, что абелеанизирующий гомоморфизм

$$G = \mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \hat{\mathbb{Z}}^*$$

возникает при действии группы G на корнях из единицы.

Теорема 5.7. *Естественное действие группы* $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *в проконечной K-теории $K(X)\hat{}$ сводится (после абелеанизации) к действию группы $\hat{\mathbb{Z}}^*$. При этом изоморфическая часть операции Адамса ψ^k,*

$$K(X)\hat{} \xrightarrow[\cong]{\psi^k} K(X)\hat{},$$

совпадает с автоморфизмом, индуцированным элементом

$$\mu_k = \prod_{(k,\,p)=1} (k) \prod_{p/k} (1) \in \prod_p \hat{\mathbb{Z}}_p^* = \hat{\mathbb{Z}}^*.$$

Поэтому действие изоморфических частей операций Адамса на представляющих K-функтор «алгебраических многообразиях»

$$BU = \varinjlim_{n,\,k} G_{n,\,k}(\mathbb{C}), \quad BO = \varinjlim_{n,\,k} «G_{n,\,k}(\mathbb{R})»$$

возникает из естественного действия группы $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *на проконечных гомотопических типах рационально определенных алгебраических многообразий.*

Доказательство теоремы 5.7 мы приведем ниже.

Замечание. Ограничиться рассмотрением изоморфических частей операций Адамса было необходимо для того, чтобы совершить это «алгебраическое» рас-

пространение операций Адамса на грассманианы и другие алгебраические многообразия. Например, имеет место

Предложение 5.8. *Нельзя определить операцию ψ^2 на 2-адическом пополнении $G_{2,n}(\mathbb{C})_2^{\wedge}$ с большим n таким образом, чтобы она была согласована с нильпотентным действием операции ψ^2 на $(BU)_2^{\wedge}$.*

Доказательство этого предложения мы тоже приведем ниже. Это доказательство подскажет нам идею построения новых интересных отображений кватернионного проективного пространства в себя.

Напомним теперь, что каждый элемент $\gamma \in K(X)^{\wedge}$ определяет некоторый стабильный гомотопический тип сферического расслоения над X. Например, в вещественном случае определена композиция

$$X \to BO^{\wedge} \xrightarrow[\text{отображение}]{\text{естественное}} BG^{\wedge} \cong BG,$$

где G означает H-пространство отображений сферы в себя степени ± 1.

Теорема 5.9 (гипотеза Адамса). *Для любого пространства X стабильный послойный гомотопический тип элемента группы $K(X)^{\wedge}$ (K обозначает вещественный или комплексный K-функтор) инвариантен относительно действия группы Галуа* $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *(и ее абелеанизации $\hat{\mathbb{Z}}^*$) и, следовательно, относительно изоморфической части операций Адамса.*

Доказательство. В гл. 4 мы определили фильтрацию пространств $BU^{\wedge}$, $BSO^{\wedge}$ с помощью последовательностей $\{(BU_n)^{\wedge}\}$, $\{(BSO_n)^{\wedge}\}$, и эта фильтрация, очевидно, инвариантна относительно группы Галуа. Поэтому каждый элемент группы Галуа определяет фильтрованную гомотопическую эквивалентность пространств $BU^{\wedge}$, $BSO^{\wedge}$. Согласно лемме об инерции (гл. 4), применяемой к теории пополненных сферических расслоений, диаграммы

$$\begin{tikzcd} BU^{\wedge} \arrow[rr, "a"] \arrow[dr] & & BU^{\wedge} \arrow[dl] \\ & B_{\infty}^{\wedge} & \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} BSO^{\wedge} \arrow[rr, "a"] \arrow[dr] & & BSO^{\wedge} \arrow[dl] \\ & B_{\infty}^{\wedge} & \end{tikzcd}$$

гомотопически коммутативны. Здесь $\alpha \in \mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, а пространство $B_{\infty}^{\wedge}$ классифицирует «стабильную теорию» проконечных сферических расслоений (см. гл. 4). Но, согласно теореме 4.1,

$$B_{\infty}^{\wedge} \cong K(\hat{\mathbb{Z}}^*, 1) \times BSG.$$

Следовательно, диаграммы

$$\begin{tikzcd} BU^{\wedge} \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr] & & BU^{\wedge} \arrow[dl] \\ & BSG & \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} BSO^{\wedge} \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr] & & BSO^{\wedge} \arrow[dl] \\ & BSG & \end{tikzcd}$$

коммутативны. В комплексном случае доказательство закончено.

Для завершения доказательства в вещественном случае остается заметить, что каноническое отображение

$$BO^{\wedge} \to BG$$

разлагается в произведение

$$(BSO^{\wedge} \to BSG) \times (\mathbb{R}P^{\infty} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{R}P^{\infty})$$

и что сужение отображения α: $BO^{\wedge} \to BO^{\wedge}$ на $\mathbb{R}P^{\infty}$ является тождественным отображением. Предложение доказано.

Замечания. Если мы применим этот результат к конечному комплексу X, приняв во внимание, что $[X, BG] \cong \prod_l [X, (BG)_l^{\wedge}]$ — произведение конечных l-групп, то мы получим, что образ элементов группы $K(X)$ вида $\psi^k x - x$ в группе $[X, BG]$ содержится в произведении p-компонент последней группы по простым делителям p числа k. Таким образом, мы приходим к первоначальной формулировке гипотезы Адамса: для каждого $x \in K(X)$ образ элемента $k^N(\psi^k x - x) \in K(X)$ с достаточно большим N в группе $J(X) = \mathrm{Im}(K(X) \to [X, BG])$ равен нулю.

Доказательство леммы об инерции для случая векторных расслоений можно было бы упростить. Действительно, стабильные расслоения

$$BO \xrightarrow[\text{отображение}]{\text{естественное}} BG$$

являются «в точности внутренними» по отношению к фильтрации $\{BO_n\}$. А именно расслоение

$$\{\text{слой}\} \to BO_{n-1} \to BO_n$$

послойно гомотопически эквивалентно каноническому сферическому расслоению над BO_n:

$$S^{n-1} \to \left\{ \begin{matrix} \text{тотальное пространство} \\ \text{сферического расслоения} \end{matrix} \right\} \to BO_n.$$

Поэтому при доказательстве леммы об инерции в этом случае не надо делать аппроксимации по остовам.

Более того, это упрощенное доказательство позволяет получить результат, заметно более сильный, чем «классическая гипотеза Адамса». А именно мы получаем коммутативность нестабильных диаграмм

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] (BO_n)\hat{} \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr] & & (BO_n)\hat{} \arrow[dl] \\ & B\hat{_n} & \end{tikzcd} \qquad (\alpha \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})).$$

В следующем параграфе мы изучим действие автоморфизмов α, связанных с некоторыми простыми числами. При этом мы получим автоморфизмы Фробениуса, действующие в различных p-адических компонентах проконечной теории n-мерных векторных расслоений $[\ \ , (BO_n)\hat{}\,]$.

В главе 6 мы свяжем действие группы Галуа в теории n-мерных проконечных векторных расслоений с действием группы Галуа в аналогичной кусочно линейной теории, топологической теории и ориентированной сферической теории. Чтобы исследовать эти связи, являющиеся аналогами феномена Адамса, мы

и проделали такую тщательную гомотопическую подготовку в первых главах. Впрочем, эта подготовка оказалась необходимой и для столь естественной формулировки утверждения Адамса, как теорема 5.9. Здесь следует упомянуть, что доказательство гипотезы Адамса для нечетных простых чисел было получено уже давно (август 1967 г.)[1]. В этом доказательстве использовалось только существование «пространственноподобных» объектов, которые можно определить чисто алгебраически и которые имеют те же когомологии $\operatorname{mod} n$, что и грассмановы многообразия, да еще некоторая неуклюжая когомотопическая техника обращения с этими объектами.

Использование теории этальных гомотопий было подсказано Квилленом, который, по слухам, располагал схемой доказательства гипотезы Адамса, «использующего алгебраическую геометрию»[2]. «2-адическая гипотеза Адамса» была доказана много позднее (январь 1970 г.), когда был преодолен барьер, мешающий рассматривать непроективные многообразия[3]. Лишь после этого стало возможным использование гомотопической эквивалентности

$$G_{n,k}(\mathbb{R}) \cong O_{n+k}(\mathbb{C})/O_n(\mathbb{C}) \times O_k(\mathbb{C}).$$

В последнем параграфе этой главы мы опишем теорию, возникшую в результате попыток непосредственного изучения вещественных алгебраических многообразий. Эта теория была одним из двух оснований, на которых держался мой оптимизм в отношении 2-адической гипотезы Адамса; другим основанием служили соображения, которые будут изложены в сле-

---

[1]) Это доказательство было рассказано (январь 1968 г.) на зимней конференции Американского математического общества в Беркли.

[2]) Квиллен довел свое доказательство до конца; см. его доклад на конгрессе в Ницце, а также предварительную публикацию: Quillen D. G., Some remarks on etale homotopy theory and a conjecture of Adams, *Topology*, 7, № 2 (1968), 111—116. — *Прим. ред.*

[3]) В жарких дискуссиях с М. Атьей, А. Борелем, П. Делинем и Д. Квилленом.

дующем параграфе, а также простая структура когомологий коммутатора группы $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Замечание (высшие операции в K-теории). Подобно тому как это делается в обычной теории когомологий, можно построить вторичные операции в K-теории. Они измеряют степень несправедливости «на уровне коциклов» соотношений между обычными (примарными) операциями, имеющих место «на уровне когомологических классов».

Например, можно построить вторичную операцию в K-теории, исходя из соотношения

$$\psi^2 \circ \psi^3 = \psi^3 \circ \psi^2$$

(Д. Андерсон). Мы считаем коциклами отображения в пространство $BU\hat{}$, которое реализуется как предел

$$\varinjlim_{n,\, k} (\text{этальный тип } G_{n,k}(\mathbb{C}));$$

на этом пределе группа $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ действует посредством гомеоморфизмов.

Можно полагать, что вторичные операции соответствуют элементам коммутатора группы $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, которые определяют гомотопии, порождающие соотношения между операциями Адамса.

Далее, если пространство таково, что его K-функтор порождается расслоениями, определенными над полем $A_{\mathbb{Q}}$, получаемым при присоединении к полю $\mathbb{Q}$ корней из единицы, то вторичные операции должны равняться нулю. Так устроено, например, пространство типа $K(\pi, 1)$ с конечной группой π. Равенство

$$\psi^2 \circ \psi^3 = \psi^3 \circ \psi^2$$

для множества расслоений, порождающего K-функтор пространства $K(\pi, 1)$ с конечной группой π, имеет место «на уровне коциклов». (Напомним, что для пространства $K(\pi, 1)$ с конечной группой π гомоморфизмы $\pi \to GL(n, \mathbb{C})$, пропускаемые через $GL(n, A_{\mathbb{Q}})$, топологически порождают K-функтор.)

Доказательство теоремы 5.7. Пусть B обозначает BSO или BU.

Утверждение: два отображения

$$\hat{B} \rightrightarrows \hat{B}$$

гомотопны в том и только в том случае, когда они индуцируют одинаковые эндоморфизмы кольца $H^*(\hat{B}; \hat{\mathbb{Z}}) \otimes \mathbb{Q}$.

Предположим, что это утверждение справедливо, и докажем теорему.

Как было доказано в этой главе (предложения 5.5 и 5.6), действие группы $G = \mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ в когомологиях $\hat{B}$ пропускается через абелеанизацию.

В комплексном случае отсюда все и следует. Действительно, группа $\hat{\mathbb{Z}}^*$ действует в комплексной K-теории, и при этом элемент $\mu_k \in \hat{\mathbb{Z}}^*$ индуцирует такой же эндоморфизм кольца когомологий пространства $BU\hat{}$, как изоморфическая часть операции Адамса ψ^k (см. замечание ниже). Поэтому действие элемента μ_k совпадает с изоморфической частью операции ψ^k (опять-таки см. замечание ниже).

Переходя к вещественному случаю, напомним, что имеется естественное расщепление

$$BO \cong BSO \times \mathbb{R}P^\infty,$$

возникающее из алгебраических отображений

$$\mathbb{R}P^\infty \cong BO(1, \mathbb{C}) \to \varinjlim_n BO(n, \mathbb{C}) \cong BO,$$

$$BSO \cong \varinjlim_n BSO(n, \mathbb{C}) \to \varinjlim_n BO(n, \mathbb{C}) \cong BO$$

и операции алгебраического суммирования Уитни в BO

$$\varinjlim (BO_n \times BO_n \to BO_{2n}).$$

Поэтому гомотопические эквивалентности пространства $BO\hat{}$, определяемые элементами группы Галуа, естественным образом разлагаются в произведения.

Операции ψ^k тоже разлагаются в произведения.

Это станет ясным, если вспомнить, что операция ψ^k

(i) переводит линейные расслоения в линейные;

(ii) переводит ориентируемые расслоения в ориентируемые;

(iii) является аддитивной.

Так как у пространства $\mathbb{R}P^\infty$ нет нетривиальных гомотопических эквивалентностей, то нам осталось изучить отображение

$$BSO^\frown \to BSO^\frown.$$

Утверждение, сделанное в начале доказательства теоремы, вместе с предыдущими вычислениями показывает, что в вещественной K-теории действует группа $\hat{\mathbb{Z}}^*$ (ψ^k соответствует μ_k), причем элементы порядка 2 действуют тривиальным образом.

Замечание. Для вычисления действия операций ψ^k в когомологиях надо использовать их свойства:

(a) если η — линейное расслоение, то $\psi^k(\eta) = \eta^k$;

(b) ψ^k есть аддитивная операция;

(c) ψ^k коммутирует с комплексификацией.

В остальном действие операции ψ^k в когомологиях вычисляется так же, как действие группы Галуа (см. предложения 5.5 и 5.6).

Осталось проверить справедливость утверждения, сформулированного в начале доказательства.

Если бы мы локализовали пространства $BU^\frown$ и $BSO^\frown$ вне двойки, то утверждения легко доказывались бы с помощью теории препятствий. Чтобы разобрать общий случай, нам придется применить другой метод. Мы рассмотрим детально только случай $B = BSO$.

Из работ Андерсона и Атьи [1]) следует, что (i) группа (по отношению к суммированию Уитни) $[B, B]$ является проективным пределом конечно порожденных групп $[B_\alpha, B]$, где B_α пробегает множество конечных подкомплексов B, и (ii) существует «когомологическое

[1]) См. Anderson D. M., The real K-theory of classifying spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **51**, № 4 (1964), 634—636. — *Прим. ред.*

вложение»

$$[B, B] \xrightarrow{\mathrm{ph}} \prod_{i=1}^{\infty} H^{4i}(B; \mathbb{Q}).$$

Нам нужно доказать, что при замене пространства B пополнением $\widehat{B}$ утверждение (ii) остается верным.

Обозначим через T_α кручение группы $[B_\alpha, B]$ (это конечная группа). Последовательность

$$0 \to T_\alpha \to [B_\alpha, B] \xrightarrow{(\mathrm{ph})_\alpha} \prod_{i=1}^{\infty} H^{4i}(B_\alpha; \mathbb{Q})$$

точна. Поскольку (как это следует из (ii)) проективный предел отображений $(\mathrm{ph})_\alpha$ мономорфен, то

$$\varprojlim_\alpha T_\alpha = 0.$$

Умножим теперь рассматриваемую точную последовательность тензорно на $\widehat{\mathbb{Z}}$ и перейдем к проективному пределу. Мы получим:

(a) $$\varprojlim_\alpha (T_\alpha \otimes \widehat{\mathbb{Z}}) \cong \varprojlim_\alpha T_\alpha = 0;$$

(b) $$\varprojlim_\alpha ([B_\alpha, B] \otimes \widehat{\mathbb{Z}}) \cong \varprojlim_\alpha [B_\alpha, \widehat{B}] \cong$$
$$\cong \varprojlim_\alpha [\widehat{B}_\alpha, \widehat{B}] \cong [\widehat{B}, \widehat{B}];$$

(c) если B_α есть 4α-й остов пространства B, то

$$\varprojlim_\alpha \prod_{i=0}^{\infty} H^{4i}(B_\alpha; \mathbb{Q}) \otimes \widehat{\mathbb{Z}} \cong$$
$$\cong \varprojlim_\alpha \prod_{i=0}^{\infty} H^{4i}(B_\alpha) \otimes \mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}} \cong \prod_{i=1}^{\infty} H^{4i}(\widehat{B}; \widehat{\mathbb{Z}}) \otimes \mathbb{Q}.$$

Следовательно, «полный характер Понтрягина» мономорфен, т. е. последовательность

$$0 \to [\widehat{B}, \widehat{B}] \xrightarrow{\mathrm{ph} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}} \prod_{i=0}^{\infty} H^{4i}(\widehat{B}; \widehat{\mathbb{Z}}) \otimes \mathbb{Q}$$

точна. Справедливость утверждения, а значит и теоремы, доказана.

Доказательство предложения 5.8. Рассмотрим прежде всего действие операций Адамса на одномерных кватернионных и двумерных комплексных расслоениях.

Предположим, что «операция ψ^p определена в $(BU_2)\hat{}_p$» [1]).

Выберем какой-нибудь представитель элемента $\mu_p \in \in \hat{\mathbb{Z}}^* \cong G/[G, G]$, где $G = \mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, в группе G. С его помощью естественно определяется операция ψ^p и в $(BU_2)\hat{}_q$ с $q \neq p$. Собирая эти действия вместе, мы получаем операцию ψ^p в

$$(BU_2)\hat{} = \prod_q (BU_2)\hat{}_q.$$

С другой стороны, легко определить ψ^p в

$$(BU_2)_0 = K(\mathbb{Q}, 2) \times K(\mathbb{Q}, 4).$$

Так как BU_2 есть расслоенное произведение пространств $(BU_2)_0$ и $(BU_2)\hat{}$ над $(B\hat{U}_2)_0 \cong K(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}, 2) \times \times K(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}, 4)$, то операция ψ^p определяется и в BU_2.

С помощью когомологических рассуждений легко доказать, что построенная операция ψ^p согласована с естественным отображением $BU_2 \xrightarrow{c_1} BU_1 \cong K(\mathbb{Z}, 2)$ (так как действие операции ψ^p переводит одномерные расслоения в одномерные, то имеется отображение $\psi^p\colon BU_1 \to BU_1$). Поэтому операция ψ^p определена в слое BSU_2 расслоения $BU_2 \to BU_1$, который есть не что иное, как бесконечномерное кватернионное проективное пространство.

При $p = 2$ это приводит к противоречию, поскольку не существует даже отображения кватернионной проективной плоскости в себя, индуцирующего на

---

[1]) То есть в функторе $[(BU_2)\hat{}_p]$ определена операция, согласованная с операцией ψ^p в обычной K-теории $[\ ,BU]$. В том же смысле далее понимаются слова «операция ψ^p определена в $(BU_2)\hat{}_q$», «операция ψ^p определена в BU_2» и т. п.

кватернионной проективной прямой

$$\mathbb{Q}P^1 \cong S^4$$

отображения степени 4[1]). Поэтому действие операции ψ^2 нельзя определить на достаточно большом конечномерном остове пространства $(BU_2)^{\wedge}_2$. Так как последнее является индуктивным пределом алгебраических многообразий $G_{2,n}(\mathbb{C})$, то операция ψ^2 не может быть алгебраической. Предложение доказано.

Предложение 5.10. *Пусть $d \in \mathbb{Z}$. Для того чтобы существовал эндоморфизм проективной плоскости $\mathbb{Q}P^2$, индуцирующий отображение $\mathbb{Q}P^1 \to \mathbb{Q}P^1$ степени d, необходимо и достаточно, чтобы d равнялось нулю или было нечетным квадратом.*

Доказательство. Необходимость этих условий была доказана разными авторами. (И. Берштейн до-

---

[1]) С помощью симплициальной реализации отображения $\mathbb{Q}P^2 \xrightarrow{f} \mathbb{Q}P^2$ (М. Арковиц и К. Куржел) или с помощью соображений трансверсальности и формулы для сигнатуры можно доказать, что степень d отображения $\mathbb{Q}P^1 \to \mathbb{Q}P^1$, индуцированного отображением f, удовлетворяет сравнению

$$d(d-1) \equiv 0 \pmod{24}\ ^{2)}.$$

[2]) Это следует также из изоморфности группы $\pi_{n+3}(S^n)$ с $n \geqslant 5$ группе $Z/24$. Подробнее $\mathbb{Q}P^2$ есть конус хопфовского отображения $h\colon S^7 \to S^4$, и существование отображения $\mathbb{Q}P^2 \to \mathbb{Q}P^2$ степени d на $\mathbb{Q}P^1$ равносильно существованию гомотопически коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} S^7 & \xrightarrow{\alpha} & S^7 \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ S^4 & \xrightarrow{\text{степень } d} & S^4. \end{array}$$

Мультипликативно-когомологические соображения очевидным образом приводят к равенству $\deg \alpha = d^2$. Применим к диаграмме операцию кратной надстройки; h перейдет в отображение, представляющее образующую χ группы $\pi_{n+3}(S^n) \cong Z/24$, и, поскольку композиционное умножение в стабильных гомотопических группах сферы билинейно, гомотопическая коммутативность диаграммы дает равенство $d\chi = d^2\chi$, т. е. $d^2 - d \equiv 0 \pmod{24}$. — *Прим. ред.*

казал, используя комплексную K-теорию, что степень должна быть квадратом; Р. Стонг и Л. Смит дали другое доказательство этого факта, применяя операции Стинрода; наконец, используя вещественную K-теорию, Г. Кук доказал, что степень должна быть равна нулю или быть нечетным квадратом.)

Таким образом, для доказательства предложения для любого простого числа $p > 2$ достаточно построить отображение $f: \mathbb{Q}P^2 \to \mathbb{Q}P^2$, индуцирующее отображение $\mathbb{Q}P^1 \to \mathbb{Q}P^1$ степени p^2. Как было объяснено выше, для этого достаточно определить ψ^p на $(BU_2)\hat{}_p$.

Рассмотрим нормализатор N тора в U_2. Как известно, существует точная последовательность

$$1 \to S^1 \times S^1 \to N \to \mathbb{Z}/2 \to 1,$$

причем ненулевой элемент группы $\mathbb{Z}/2$ действует в $S^1 \times S^1$ посредством перестановки координат. Рассмотрим возникающую диаграмму классифицирующих пространств

$$\begin{array}{ccccc} BS^1 \times BS^1 & \to & BN & \to & \mathbb{R}P^\infty \\ & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \\ & & BU_2 & & \end{array}$$

Как это видно из спектральной последовательности горизонтального расслоения, $H^*(BN;\ \mathbb{Z}/p)$ при $p > 2$ совпадает с инвариантной частью когомологий пространства $BS^1 \times BS^1$. Значит, j индуцирует изоморфизм когомологий $\operatorname{mod} p$. Так как $\pi_1 BN = \mathbb{Z}/2$, то после p-адического пополнения отображение j становится изоморфизмом

$$(BU_2)\hat{}_p \cong (BN)\hat{}_p.$$

У группы N существует эндоморфизм, действующий на торе $S^1 \times S^1 \subset N$ как возведение в любую степень k. Ясно, что соответствующее отображение пространства BN в себя «является» операцией ψ^k. Поэтому для любого k операция ψ^k определена на $(BU_2)\hat{}_p$. В частности, на нем определена операция ψ^p. Предложение доказано.

Приведенное доказательство показывает, что при $p > n$

$$(BU_n)_p^{\wedge} \cong (B(\text{нормализатор тора}))_p^{\wedge}.$$

В частности, имеет место

Следствие 5.11. *При $p > n$ операция ψ^p определена на пространствах BU_n и BSU_n.*

Замечание. При $n > 1$ мы получаем отображения классифицирующих пространств групп Ли, которые не индуцированы никакими гомоморфизмами самих групп Ли (это очень легко проверить для группы $SU_2 \cong S^3$). Приведенные примеры являются ответом на вопрос П. Баума.

Гипотеза. *На пространстве BU_p нельзя определить операцию ψ^p.*

Замечание. Комбинируя гомотопическую эквивалентность

$$(BU_n)_p^{\wedge} \cong (B(\text{нормализатор тора}))_p^{\wedge}$$

со сферическими топологическими группами, рассматриваемыми в гл. 4, мы получаем экзотические «p-адические аналоги группы U_n».

А именно,

$$B(\text{нормализатор тора}) = \prod_{i=1}^{n} (BS^1 \times E\mathfrak{S}_n)/\mathfrak{S}_n,$$

где $\mathfrak{S}$ — группа перестановок n элементов, а $E\mathfrak{S}_n$ — тотальное пространство универсального $\mathfrak{S}_n$-расслоения.

Аналогично, для любого делителя λ числа $p-1$ и любого $n < p$ положим

$$U(n, \lambda) = \Omega\left(\left(\prod_{i=1}^{n} B(S^{2\lambda-1})_p^{\wedge} \times E\mathfrak{S}_n\right) \middle| \mathfrak{S}_n\right)_p^{\wedge}.$$

При $\lambda = 1$ мы получим p-адическую часть унитарной группы до размерности $p-1$. При $\lambda = 2$ мы по-

лучим p-адическую часть симплектической группы до размерности $p-1$. При других делителях λ числа $p-1$ мы получим новые «конечномерные» p-адические группы (в гомотопической категории).

§ 5. ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КОНЕЧНЫХ ГРАССМАНИАНОВ, ПОРОЖДЕННЫЕ АВТОМОРФИЗМАМИ ФРОБЕНИУСА

Как мы показали в предыдущем параграфе, действие группы Галуа $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ в проконечной K-теории абелево и, более того, порождается «изоморфическими частями» операций Адамса. Поэтому имеется изоморфизм

$$\hat{\mathbb{Z}}^* \xrightarrow{\substack{\text{замыкание} \\ \text{«изоморфизмов} \\ \text{Адамса»}}} \pi_0 \begin{pmatrix} \text{пространство} \\ \text{гомотопических} \\ \text{эквивалентностей} \\ B \to B \end{pmatrix} = \pi(B),$$

где

$$B = \begin{cases} BO\hat{\ } = \varinjlim\limits_{n,\,k} G_{n,\,k}(\mathbb{R})\hat{\ }, \\ BU\hat{\ } = \varinjlim\limits_{n,\,k} G_{n,\,k}(\mathbb{C})\hat{\ }, \end{cases}$$

такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \arrow[rr, "\substack{\text{алгебраическое} \\ \text{действие}}"] \arrow[dr, swap, "\text{абелеанизация}"] & & \pi(B) \arrow[dl, "\substack{\text{«замыкание} \\ \text{изоморфизмов} \\ \text{Адамса»}}"] \\
& \hat{\mathbb{Z}}^* &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Симметрии Галуа в бесконечном грассманиане согласованы с симметриями Галуа в «конечном грассманиане» (т. е. в грассманиане с конечным k или

с конечными k и n) [1]. Поэтому определены гомоморфизмы

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \arrow[r, "\text{алгебраическое действие}"] \arrow[dr, "\text{алгебраическое действие}"'] & \pi(G_{n,k}(R)\hat{\ }) \\
& \pi(G_{n,k}(\mathbb{C})\hat{\ })
\end{tikzcd}$$

Как мы видели, возникающее действие группы Галуа на когомологиях абелеанизируется. Естественно задать вопрос, в какой степени абелеанизируется «гомотопическое представление» группы $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Можно далее спросить (считая, что это действие абелево), существуют ли естественные элементы (вроде операций Адамса в бесконечном грассманиане), порождающие это действие.

Что касается первого вопроса, то он существенно отличается от вопросов, рассматривавшихся в предыдущем параграфе. Не существует никакой теории [2], которая позволяла бы доказывать гомотопность отображений в такое пространство, как конечный грассманиан:

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} (\text{конечный грассманиан})\hat{_p}.$$

Все, что мы можем сделать, — это прямо построить гомотопию. Наше построение гомотопии между отображениями f и g состоит из двух частей. Первая использует арифметические свойства уравнений, определяющих грассмановы многообразия. Вторая опирается на стягиваемость пространства $(K(\pi, 1))\hat{_p}$ в случае, когда π не является p-группой. Поэтому нам будет удобно разбить изучение автоморфизмов пополненного грассманиана на изучение автоморфизмов его p-адических компонент.

---

[1]) Этот факт существенно используется при доказательстве гипотезы Адамса.

[2]) Кроме «тавтологической» теории расслоений.

Мы построили бесконечное множество групп симметрий (по одной для каждого простого числа $q \neq p$) конечных грассманианов

$$\begin{tikzcd} U_q \arrow[r, "\substack{q\text{-й автоморфизм}\\ \text{Фробениуса}}"] \arrow[dr] & \pi\begin{pmatrix}p\text{-адический}\\ \text{конечный}\\ \text{грассманиан}\end{pmatrix} \\ & \hat{\mathbb{Z}}_p^*, \end{tikzcd}$$

где U_q—подгруппа группы $\hat{\mathbb{Z}}_p^*$, порождаемая числом q[1]).

Действие каждой из этих групп согласовано с действием p-адической компоненты $\hat{\mathbb{Z}}_p^*$ группы $\hat{\mathbb{Z}}^*$ на p-адической компоненте пополнения бесконечного грассманиана,

$$\left\{\begin{matrix}\text{группа Галуа}\\ \text{корней из}\\ \text{единицы сте-}\\ \text{пени } p^n,\ n=\\ =1, 2, \ldots\end{matrix}\right\} = \hat{\mathbb{Z}}_p^* \xrightarrow{\substack{\text{алгебраи-}\\ \text{ческое}\\ \text{действие}}} \pi\begin{pmatrix}p\text{-адический}\\ \text{бесконечный}\\ \text{грассманиан}\end{pmatrix}.$$

Однако на конечном уровне мы не знаем, коммутируют ли различные действия автоморфизмов Фробениуса и согласованы ли они, т. е., например, если степени одного простого числа, скажем q, p-адически сходятся к другому простому числу, скажем l, то будет ли

$$\lim (q\text{-й автоморфизм Фробениуса})^n = \\ = (l\text{-й автоморфизм Фробениуса})$$

в проконечной группе

$$\pi\,(p\text{-адический конечный грассманиан}).$$

Этот вопрос о согласованности действия различных автоморфизмов Фробениуса на конечных грассманианах кажется интересным. Группа, которую они порождают, может априори быть любой группой между

[1]) Эти симметрии определены лишь с точностью до сопряжения в группе π (p-адический конечный грассманиан). — *Прим. перев.*

бесконечным свободным произведением групп $\hat{\mathbb{Z}}_p^*$ и одной группой $\hat{\mathbb{Z}}_p^*$. Чтобы ответить на этот вопрос, надо найти достаточно много этальных покрытий конечного грассманиана и описать действие группы Галуа на нервах этих покрытий. Рассмотренные выше «интуитивные» примеры [1]) и «нильпотентные» действия показывают, что неабелевость группы Gal $(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ должна где-то себя проявить.

Простейшая некоммутативная группа Галуа G, действие которой может оказаться существенным, — это группа Галуа поля, получаемого при присоединении к полю $\mathbb{Q}$ всех корней степени p из p[2]). Эта группа G является (при $p > 2$) полупрямым произведением

$$1 \to \mathbb{F}_p \to G \to \mathbb{F}_p^* \to 1,$$

где $\mathbb{F}_p$ есть поле из p элементов.

Мы закончим эти общие рассуждения замечанием, что (как нам кажется) арифметическая структура уравнений, выделяющих группу $O(n, \mathbb{C})$, заставляет нас отбросить для некоторых конечных (нечетных) грассманианов случай, когда $q=2$, а p нечетно. Этот факт показывает, насколько важна здесь арифметика.

Теперь перейдем к основной теореме этого параграфа.

Группа Галуа Gal $(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ содержит бесконечное множество классов сопряженных подгрупп, а именно «групп разложения» G_q «$\subseteq$» Gal $(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ [3]). Группа разложения G_q строится по q-адическому пополнению $\mathbb{Q}^b$ поля $\mathbb{Q}$. Существует естественный эпиморфизм группы G_q в группу Галуа алгебраического замыка-

---

[1]) Категории, связанные с проективными пространствами.

[2]) Это предположение исходит от Дж. Тейта.

[3]) Определение группы G_q и эпиморфизма $G_q \to \hat{Z}$ (см. ниже) будет дано в начале доказательства теоремы 5.12. Последняя не является теоремой в точном смысле этого слова; ее формулировка представляет собой обещание определить все объекты, входящие в «диаграмму Фробениуса», и доказать их перечисляемые свойства. — *Прим. ред.*

ния поля $\mathbb{F}_q$ над $\mathbb{F}_q$,

$$G_q \xrightarrow{\text{«приведение mod } q\text{»}} \operatorname{Gal}(\tilde{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q) \cong \hat{\mathbb{Z}}.$$

Заметим теперь, что в группе Галуа $\operatorname{Gal}(\tilde{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ существует каноническая образующая — автоморфизм Фробениуса. Это позволяет определить естественное (экспоненциальное) отображение

$$\hat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\exp} \hat{\mathbb{Z}}_p^*,$$

$$\text{автоморфизм Фробениуса} \longmapsto q.$$

Образ этого отображения мы обозначим через U_q.

Теорема 5.12. *Для каждого*[1]) *простого числа $q \neq p$ имеется естественная коммутативная диаграмма Фробениуса*

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \arrow[rr, "\substack{\text{алгебраическое}\\ \text{действие}}"] & & \pi\begin{pmatrix}p\text{-адический}\\ \text{конечный}\\ \text{грассманиан}\end{pmatrix} \\
G_q \arrow[u, "\substack{\text{класс}\\ \text{сопряженности}\\ \text{включений}}"] \arrow[r, "\substack{\text{«приведение}\\ \text{mod } q\text{»}}"'] & \hat{\mathbb{Z}} \arrow[r, "\begin{pmatrix}\text{автоморфизм}\\ \text{Фробениуса}\end{pmatrix} \mapsto q"'] & U_q \subseteq \hat{\mathbb{Z}}_q^*, \arrow[u, "\substack{\text{гомоморфизм,}\\ \text{который дол-}\\ \text{жен быть}\\ \text{построен}}"']
\end{tikzcd}$$

доставляющая частичную абелеанизацию группы Галуа.

Образ канонической образующей (автоморфизма Фробениуса) группы $\hat{\mathbb{Z}}$ в группе

$$\pi\begin{pmatrix}p\text{-адический}\\ \text{конечный}\\ \text{грассманиан}\end{pmatrix}$$

определяет каноническую операцию Фробениуса (или Адамса) ψ^q в p-адической теории векторных расслоений с данной размерностью и коразмерностью слоя[2]).

---

[1]) В вещественном случае для некоторых нечетных p следует исключить $q = 2$. Эти исключения не затрагивают «2-адический вещественный грассманиан».

[2]) Коразмерность слоя — это размерность слоя расслоения, дополняющего данное расслоение до тривиального; последнее также предполагается фиксированным. — *Прим. перев.*

Замечание. Как уже отмечалось, мы не знаем, имеют ли место равенства

$$\psi^q \cdot \psi^l = \psi^l \cdot \psi^q.$$

Однако теорема утверждает, что элемент ψ^q порождает «правильную» подгруппу $U_q \subseteq \hat{\mathbb{Z}}_p^*$.

Доказательство. Рассмотрим алгебраическое замыкание $\tilde{\mathbb{Q}}_q$ поля q-адических чисел $\mathbb{Q}_q$ и положим $G_q = \mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}_q/\mathbb{Q}_q)$. Поле алгебраических чисел $\tilde{\mathbb{Q}}$ можно (неканонически) вложить в поле $\tilde{\mathbb{Q}}_q$. Тогда группа Галуа G_q начинает действовать на поле $\tilde{\mathbb{Q}}$ и возникает гомоморфизм

$$G_q \to G = \mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}).$$

Этот гомоморфизм определен с точностью до сопряжения в группе G и является вложением. С другой стороны, группа G_q переводит целые числа поля $\tilde{\mathbb{Q}}_q$ в целые числа, сохраняя при этом их вычеты $\mathrm{mod}\, q$, которые составляют алгебраическое замыкание $\tilde{\mathbb{F}}_q$ поля $\mathbb{F}_q$ из q элементов. Следовательно, определено отображение

$$G_q \to \hat{\mathbb{Z}} = \mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q).$$

Это отображение эпиморфно, и в группе $\hat{\mathbb{Z}}$ имеется каноническая образующая — автоморфизм Фробениуса [1]).

Рассматриваемые отображения можно включить в коммутативную диаграмму

(I)
$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[r, "\text{абелеанизация}"] & \hat{\mathbb{Z}}^* \arrow[d, "\text{p-адическая проекция}"] \\
G_q \arrow[ur, "\text{мономорфизм}"] \arrow[dr, "\text{эпиморфизм}"'] & & \\
& \hat{\mathbb{Z}} \arrow[r, "\binom{\text{автоморфизм}}{\text{Фробениуса}} \mapsto q"] & \hat{\mathbb{Z}}_p^*
\end{tikzcd}$$

[1]) Я благодарен Барри Мазуру, который разъяснил мне эту ситуацию и ее связь с теорией этальных гомотопий.

Артин и Мазур показали, что при определенных ограничениях p-адическая часть этального гомотопического типа алгебраического многообразия может быть построена по редукции этого многообразия $\operatorname{mod} q$, $q \neq p$. Например, для нахождения этального гомотопического типа комплексного грассманиана достаточно рассмотреть «грассманово многообразие над полем характеристики q»:

$$GL(n+k,\ \widetilde{\mathbb{F}}_q)/GL(n,\ \widetilde{\mathbb{F}}_q) \times GL(k,\ \widetilde{\mathbb{F}}_q),$$

которое тоже является неособым $2nk$-мерным многообразием.

В этом случае (когда многообразие имеет хорошую редукцию $\operatorname{mod} p$) из результатов Артина — Мазура следует, что сужение действия группы G на G_q пропускается через отображение $G_q \to \hat{\mathbb{Z}}$:

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dr, "\text{Галуа}"] & \\ G_q \arrow[ur] \arrow[dr] & & \pi(p\text{-адический конечный грассманиан}). \\ & \hat{\mathbb{Z}} \arrow[ur, "\text{Фробениус}"'] & \end{tikzcd}$$

Как это следует из диаграммы (I), действие группы $\hat{\mathbb{Z}}$ в когомологиях пропускается через отображение

$$\hat{\mathbb{Z}} \xrightarrow[\left(\substack{q\text{-й автоморфизм} \\ \text{Фробениуса}}\right) \mapsto q]{r} \hat{\mathbb{Z}}_p^*.$$

Мы докажем сейчас, что группа $\pi = \operatorname{Ker} r$ тривиально действует на p-адическом гомотопическом типе (который мы обозначаем через X). Из этого утверждения следует, что естественное отображение

$$G_q \to \hat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\text{Фробениус}} \pi(X)$$

пропускается через $U_q \subseteq \hat{\mathbb{Z}}_p^*$,

$$\begin{array}{ccc} G_q \to U_q & \xrightarrow{\text{Фробениус}} & \pi(X) \\ \cap\!\shortparallel & & \\ \hat{\mathbb{Z}}_p^* & & \end{array}$$

что нам и нужно.

Чтобы доказать, что π действует тривиально, вспомним, что действие группы $\hat{\mathbb{Z}}$ (а следовательно, и π) в пополненном грассманиане является проективным пределом симплициальных действий на односвязных нервах[1]). На каждом нерве N_α действие группы π пропускается через конечную факторгруппу π_α. Обозначим через E_α универсальную накрывающую комплекса $K(\pi_\alpha, 1)$ и рассмотрим новую проективную систему

$$\{N'_\alpha\} = \{(N_\alpha \times E_\alpha)/\pi_\alpha\}.$$

При этом имеется естественное расслоение

$$N_\alpha \to N'_\alpha \to K(\pi_\alpha, 1),$$

база, слой и тотальное пространство которого имеют конечные гомотопические группы. Рассмотрев теоретико-гомотопический проективный предел этих расслоений (подобно тому как это делалось в гл. 3), мы получим расслоение

$$X \to X' \xrightarrow{\rho} K(\pi, 1).$$

По построению действие группы π на когомологиях $\operatorname{mod} p$ слоя тривиально. Далее, из диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
0 \to \pi \to \hat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & U_q \to 1 \\
\| & & \cap| \\
\left(\prod\limits_{l \neq p} \hat{\mathbb{Z}}_l\right) \times \hat{\mathbb{Z}}_p & \cdots\to & \hat{\mathbb{Z}}_p = (\mathbb{Z}/p-1) \times \hat{\mathbb{Z}}_p
\end{array}$$

у которой верхняя строка точна, следует, что когомологии $\operatorname{mod} p$ самой группы π тривиальны. Поэтому из когомологической спектральной последовательности, соответствующей расслоению $X \to X' \to K(\pi, 1)$, вытекает, что вложение $X \to X'$ индуцирует изоморфизм когомологий $\operatorname{mod} p$. Далее, p-адическое пополнение фундаментальной группы π-пространства X' тривиально.

---

[1]) В вещественном случае мы рассматриваем только грассманиан ориентированных плоскостей.

Поэтому композиция

$$\left\{\begin{matrix} p\text{-адическая часть} \\ \text{конечного} \\ \text{грассманиана} \end{matrix}\right\} = X \to X' \xrightarrow[\substack{p\text{-проконечное} \\ \text{пополнение}}]{c} (X')\hat{}_p$$

является гомотопической эквивалентностью. Это означает, что отображение

$$X' \xrightarrow{\rho \times c} X \times K(\pi, 1)$$

тоже является гомотопической эквивалентностью. Так как по построению группа π тривиально действует на X', то из гомотопической эквивалентности

$$X' \cong X \times K(\pi, 1)$$

следует, что π тривиально действует и на X. Теорема доказана.

Замечание. Попутно мы доказали, что верен интересный теоретикс-гомотопический факт, который грубо можно сформулировать так. Пусть отображение $f\colon X \to X$ является частью такой «группы преобразований» π пространства X, что (i) когомологии $\operatorname{mod} p$ группы π тривиальны; (ii) группа π действует тривиально на когомологиях $\operatorname{mod} p$ пространства X. Тогда f индуцирует отображение p-адического пополнения пространства X, гомотопное тождественному.

Добавление 1. При изучении вещественного грассманиана случай, когда $q = 2$ и p нечетно, является исключительным. Дело в том, что наше описание компактной ортогональной группы

$$O(n, \mathbb{C}) \subseteq GL(n, \mathbb{C})$$

использовало квадратичную форму

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

Если характеристика q равняется двум, то

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = (x_1 + \ldots + x_n)^2,$$

и потому подгруппа группы $GL(n, F_q)$, сохраняющая форму $x_1^2 + \ldots + x_n^2$, совпадает с подгруппой, сохра-

няющей линейный функционал $x_1 + \ldots + x_n$. Но эта подгруппа больше похожа на группу $GL(n-1)$, чем на ортогональную группу; например, она имеет размерность $n^2 - n$ вместо $(n^2 - n)/2$. Таким образом, группа $O(n, \mathbb{C})$ не имеет удовлетворительной редукции mod 2.

Мы можем изменить определение комплексной ортогональной группы при $n = 2k$. Рассмотрим подгруппу группы $GL(n, \mathbb{C})$, сохраняющую «расщепляющуюся форму» $x_1x_2 + x_3x_4 + \ldots + x_{2k-1}x_{2k}$. Нетрудно проверить, что эта подгруппа сопряжена с подгруппой

$$O(n, \mathbb{C}) \subseteq GL(n, \mathbb{C}).$$

Она хорошо редуцируется по модулю 2 и определяет в $GL(n, \widetilde{\mathbb{F}}_q)$ подгруппу размерности $(n^2 - n)/2$. Поэтому теорема 5.12 применима к четным грассманианам

$$\widetilde{G}_{2n, 2k}(\mathbb{R}) = SO(2n + 2k, \mathbb{C})/SO(2n, \mathbb{C}) \times SO(2k, \mathbb{C})$$

и при $q = 2$. Следовательно, она применима при всех q к многообразию

$$BSO_{2n} = \lim_{k \to \infty} \widetilde{G}_{2n, 2k}(\mathbb{R}).$$

Для изучения при $q=2$ многообразия BSO_{2n+1} можно применить такой прием. При нечетных p композиция

$$BSO_{2n+1} \to BU_{2n+1} \to B^1 \to (B^1)^{\wedge}_p$$

является p-проконечным пополнением. Здесь B^1 можно описать двумя способами:

(i) $$B^1 = (BU_{2n+1} \times S^{\infty})/(\mathbb{Z}/2),$$

где $\mathbb{Z}/2$ действует как комплексное сопряжение, умноженное на антиподальное отображение;

(ii) $(B^1)^{\wedge}$ есть предел этальных гомотопических типов «вещественных грассманианов»

$$\lim_{k \to \infty} GL(n + k, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{R}) \times GL(k, \mathbb{R})$$

(детали см. в следующем параграфе).

Поэтому подгруппа группы $\hat{\mathbb{Z}}_p^*$, порожденная элементом 2, действует в $(BSO_{2n+1})_p^{\wedge}$ (так как она действует в $(BU_{2n+1})_p^{\wedge}$).

Во всех случаях ($p = 2, 3, 5, \ldots$) элемент порядка 2 группы $\hat{\mathbb{Z}}_p^*$ соответствует комплексному сопряжению и тривиально действует на p-адической компоненте гомотопического типа вещественного грассманиана.

Добавление 2. Укажем основные моменты проведенного доказательства теоремы 5.12. Пусть V — алгебраическое $\mathbb{Q}$-многообразие. Если когомологии многообразия V порождаются алгебраическими циклами, то действие группы $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ в когомологиях (которые есть только в четных размерностях) пропускается через абелеанизацию $\hat{\mathbb{Z}}^*$. Если многообразие V хорошо редуцируется $\mathrm{mod}\, p$, то сужение действия группы Галуа $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ на G_q сводится к действию группы $\hat{\mathbb{Z}}$. Если при этом $(\pi_1 V)_p^{\wedge} = 0$, то действие группы G_q сводится с помощью описанной в доказательстве гомотопической конструкции к действию группы $U_q \subseteq \hat{\mathbb{Z}}_p^*$.

§ 6. ЭТАЛЬНЫЙ ГОМОТОПИЧЕСКИЙ ТИП ВЕЩЕСТВЕННОГО МНОГООБРАЗИЯ. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ГИПОТЕЗА

Предположим, что комплексное алгебраическое многообразие $V_{\mathbb{C}}$ определено над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, т. е. что многообразие $V_{\mathbb{C}}$ определяется системой уравнений с вещественными коэффициентами. Обозначим через $|V_{\mathbb{R}}|$ множество (возможно, пустое) вещественных решений этих уравнений.

На многообразии $V_{\mathbb{C}}$ определена инволюция c — комплексное сопряжение, — которая локально действует по формуле

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n) \xrightarrow{c} (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n).$$

Отображение c является алгебраическим гомеоморфизмом многообразия V, и множество его неподвижных точек совпадает с $|V_{\mathbb{R}}|$.

Возникает естественный вопрос, нельзя ли в какой-нибудь мере описать гомотопический тип многообразия $|V_{\mathbb{R}}|$ алгебраически.

Мы можем алгебраическими средствами определить этальный гомотопический тип V_{et} (т. е. проконечное пополнение множества комплексных точек $V_{\mathbb{C}}$) и инволюцию σ на V_{et}, соответствующую комплексному сопряжению в $V_{\mathbb{C}}$. Таким образом, пара (V_{et}, σ) является алгебраически определяемой теоретико-гомотопической моделью геометрической пары ($V_{\mathbb{C}}$, сопряжение). Мы приходим к рассмотрению следующего вопроса «геометрической теории гомотопий»:

Какие свойства гомотопического типа множества неподвижных точек F относительно инволюции t, действующей на конечномерном локально компактном пространстве X, можно определить, зная гомотопическую модель инволюции?

В примерах, разобранных в гл. 1, мы видели, как можно найти некоторые 2-адические пополнения кольца когомологий или K-функтора множества неподвижных точек инволюции, рассматривая соответствующую «свободную инволюцию»

$$(X', t') = (X \times S^{\infty},\ t \times \text{антиподальное отображение}),$$
$$S^{\infty} = \text{бесконечномерная сфера},$$

с пространством орбит

$$X_t = X'/(x \sim t'x) = (X \times S^{\infty})/(\mathbb{Z}/2).$$

Пара (X', t') является хорошей гомотопической моделью геометрической инволюции (X, t). Например, проекция на второй сомножитель порождает полезное расслоение

$$X \cong X' \to X_t \to \mathbb{R}P^{\infty} = S^{\infty}/(\mathbb{Z}/2).$$

Символом (геометрия, $\mathbb{Z}/2$) мы обозначим категорию, объектами которой являются конечномерные локально компактные пространства с инволюцией, а морфиз-

мами — эквивариантные отображения. Обозначим, далее, символом (гомотопия, $\mathbb{Z}/2$) категорию, объектами которой являются CW-комплексы со *свободной* инволюцией, а морфизмами — эквивариантно гомотопические классы эквивариантных отображений.

По каждому объекту в категории (геометрия, $\mathbb{Z}/2$) можно построить:

(a) множество неподвижных точек;

(b) ассоциированную свободную инволюцию

$$(X', t') = (X \times S^{\infty},\ t \times \text{антиподальная инволюция}).$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] (\text{геометрия},\ \mathbb{Z}/2) \arrow[r, "{\times\,(S^{\infty},\ \text{антиподальная инволюция})}"] \arrow[d, "\text{множество неподвижных точек}"'] & (\text{гомотопия},\ \mathbb{Z}_2) \arrow[d, dotted, "\mathscr{F}"] \\ \left\{\begin{matrix}\text{топологические}\\ \text{пространства}\end{matrix}\right\} \arrow[r] & \left\{\begin{matrix}\text{гомотопические}\\ \text{типы}\end{matrix}\right\}. \end{tikzcd}$$

Основной вопрос можно сформулировать так:

Существует ли функториальная конструкция $\mathscr{F}$ «теоретико-гомотопического множества неподвижных точек свободной инволюции», делающая эту диаграмму коммутативной?

Точнее, мы будем интересоваться только 2-адической частью гомотопического типа множества неподвижных точек. Это естественно в свете приведенных в первой главе примеров, касающихся когомологий и K-функтора. Кроме того, уже на примерах инволюций на сферах можно усмотреть, что «нечетная часть» гомотопического типа множества неподвижных точек может меняться при неизменном эквивариантном гомотопическом типе гомотопической модели (X', t').

Существует естественный кандидат на роль теоретико-гомотопического множества неподвижных точек. В геометрическом случае [т. е. в категории (геометрия, $\mathbb{Z}/2$)] множество неподвижных точек пары (X, t) есть не что иное, как пространство эквивариантных отобра-

жений {точка} $\to X$. В категории (гомотопия, $\mathbb{Z}/2$) роль точки играет любое стягиваемое пространство со свободной инволюцией, например, бесконечномерная сфера с антиподальной инволюцией.

Определение. Пусть X есть CW-комплекс с инволюцией t. Назовем *теоретико-гомотопическим множеством неподвижных точек* пары (X, t) сингулярный комплекс эквивариантных отображений $S^\infty \to X$; обозначение: $\mathcal{F}(X, t)$.

Сформулируем несколько легко проверяемых свойств этой конструкции:

(i) пространство $\mathcal{F}(S^\infty$, антиподальное отображение) стягиваемо;

(ii) $\mathcal{F}(X, t) \cong \mathcal{F}(X', t')$;

(iii) $\mathcal{F}(X \times X$, перестановка$) \cong X$;

(iv) $\mathcal{F}(X', t')$ есть сингулярный комплекс сечений расслоения $X_t \to \mathbb{R}P^\infty$ (это — обобщение (i)).

Мы формулируем следующую *гипотезу о неподвижных точках*:

Пусть (X, t) — триангулируемая инволюция на локально компактном пространстве. Тогда

$$(\text{множество неподвижных точек } (X, t))^{\wedge}_2 \cong (\mathcal{F}(X', t'))^{\wedge}_2,$$

т. е. диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(\text{геометрия}, \mathbb{Z}/2) \arrow[rr, "\times (S^\infty,\ \text{антиподальная инволюция})"] \arrow[d, "\text{«геометрическое множество неподвижных точек»}"] & & (\text{гомотопия}, \mathbb{Z}/2) \arrow[d, "\text{«теоретико-гомотопическое множество неподвижных точек»}"'] \\
\left\{\begin{array}{c}\text{триангулируемые}\\ \text{топологические}\\ \text{пространства}\end{array}\right\} \arrow[dr, "\text{2-адическое пополнение}"] & & \left\{\begin{array}{c}\text{гомотопическая}\\ \text{категория}\end{array}\right\} \arrow[dl, "\text{2-адическое пополнение}"'] \\
& \left\{\begin{array}{c}\text{гомотопическая}\\ \text{категория}\end{array}\right\} &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Другими словами, 2-адический гомотопический тип геометрического множества неподвижных точек восстанавливается по ассоциированной свободной (теоретико-гомотопической) инволюции.

Сделаем несколько замечаний.

(i) Гипотеза справедлива для естественной инволюции на пространстве $X \times X$. Это легко проверить непосредственно (см. свойство (iii) выше).

(ii) Гипотеза справедлива, если (X, t) — свободная инволюция. Действительно, в этом случае пространство X_t когомологически конечномерно [1]), и потому расслоение $X_t \to \mathbb{R}P^\infty$ не имеет сечений (см. ниже интересное следствие E).

(iii) Если инволюция является тождественным отображением, то множество неподвижных точек совпадает с X. С другой стороны, в этом случае теоретико-гомотопическое множество неподвижных точек совпадает с множеством всех гомотопических классов отображений пространства $\mathbb{R}P^\infty$ в X. Поэтому если гипотеза справедлива, то *2-адическая часть пространства базированных отображений* $\mathbb{R}P^\infty \to X$ *стягиваема.*

(iv) Последнее утверждение вряд ли удастся доказать, минуя «гипотезу о неподвижных точках»; напротив, представляется вероятным, что последняя может быть выведена из этого утверждения. Действительно, пусть (X, t) — гладкое многообразие с гладкой инволюцией, и пусть многообразие F неподвижных точек связно. Обозначим через ν проективизацию нормального расслоения F. Как нетрудно проверить,

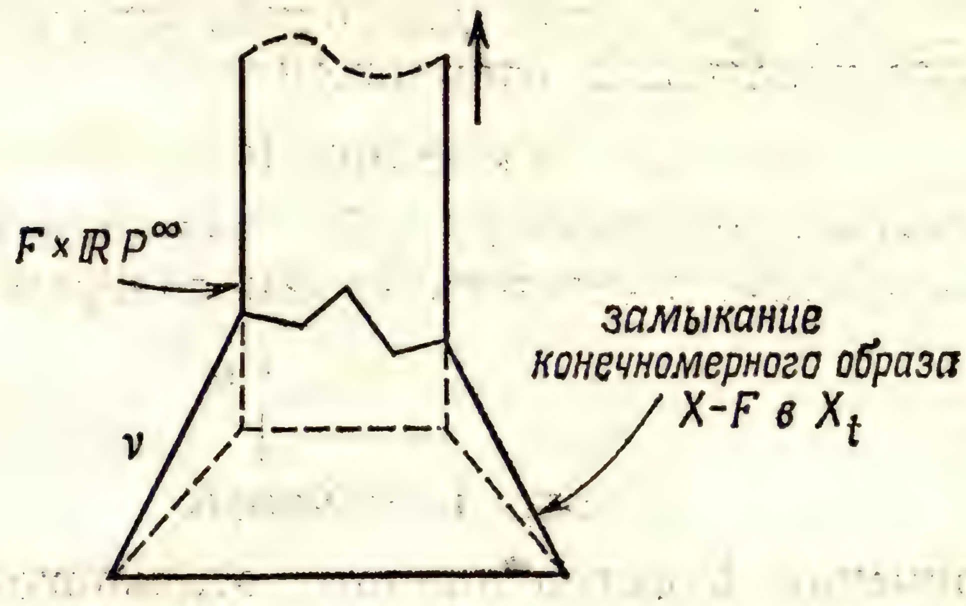
$$X_t \cong [F \times \mathbb{R}P^\infty] \bigcup_{\nu} [(X - F)/(x \sim tx)],$$

где $\nu \to (X - F)/(x \sim tx)$ — естественное вложение и $\nu \to F \times \mathbb{R}P^\infty$ — произведение проекции (на F) и классифицирующего отображения канонического линейного

---

[1]) В этом случае пространство X_t гомотопически эквивалентно факторпространству по инволюции самого пространства X. — *Прим. ред.*

расслоения над ν.



Гипотеза, сформулированная в (iii), утверждает, грубо говоря, что отображение пространства $\mathbb{R}P^{\infty}$ в X_t не может «слишком сильно учитывать локально компактную часть X_t». Поэтому достаточно рассматривать отображения $\mathbb{R}P^{\infty}$ в $F \times \mathbb{R}P^{\infty}$. Применяя еще раз гипотезу из (iii), мы получаем нужный результат.

Вещественная эталь-гипотеза. Вернемся к исходному вопросу о гомотопических свойствах вещественного алгебраического многообразия.

Пусть (X, t) — этальный гомотопический тип соответствующего комплексного многообразия с инволюцией, соответствующей комплексному сопряжению. Мы будем рассматривать пару (X, t) как проективный предел комплексов X^{α} с инволюциями. Это возможно, поскольку существует конфинальная последовательность этальных покрытий многообразия $V_{\mathbb{C}}$, инвариантных (хотя и не неподвижных) относительно группы Галуа.

Рассмотрим расслоения

$$X^{\alpha} \to X_t^{\alpha} \to \mathbb{R}P^{\infty}.$$

Переходя к пределу, мы получим полное расслоение

$$X \to X_t \to \mathbb{R}P^{\infty}.$$

Последнее имеет следующее прямое алгебраическое описание.

Высказывание «многообразие $V_{\mathbb{R}}$ определено над полем вещественных чисел» означает, что многообразие $V_{\mathbb{R}}$ получилось при склеивании конечных $\mathbb{R}$-алгебр. Поэтому определено отображение

$$V_{\mathbb{R}} \to \operatorname{Spec} \mathbb{R}.$$

Комплексное многообразие $V_{\mathbb{C}}$ является расслоенным произведением, соответствующим диаграмме

$$\begin{array}{ccc} & & V_{\mathbb{R}} \\ & & \downarrow \\ \operatorname{Spec} \mathbb{C} & \to & \operatorname{Spec} \mathbb{R} \end{array}$$

Применяя функтор полного этального гомотопического типа, мы получаем расслоенный квадрат

$$\begin{array}{ccc} X & \to & \text{этальный гомотопический тип } (V_{\mathbb{R}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \to & \text{этальный гомотопический тип } \operatorname{Spec} \mathbb{R} \\ & & \| \\ & & K(\mathbb{Z}/2,\ 1) \end{array}$$

т. е. расслоение

$$X \to X_t \to \mathbb{R}P^{\infty}.$$

Теперь мы можем высказать гипотезу, что существуют три эквивалентных описания 2-адического гомотопического типа множества вещественных точек.

(i) Это есть 2-адическое пополнение пространства эквивариантных отображений бесконечномерной сферы в этальный гомотопический тип соответствующего комплексного многообразия. (Сначала мы рассматриваем проективную систему пространств эквивариантных отображений в каждый конечный нерв X^{α}, затем 2-адически пополняем эти пространства и рассматриваем их теоретико-гомотопический проективный предел, как в гл. 3.)

(ii) Это есть пространство сечений этальной реализации определенного выше отображения $V_{\mathbb{R}} \to \operatorname{Spec} \mathbb{R}$. (Опять-таки, сначала мы пополняем этальный гомотопический тип многообразия $V_{\mathbb{R}}$, получаем отображение $X_t \to \mathbb{R}P^{\infty}$ и 2-адически пополняем сингулярный комплекс сечений.)

Замечание. Последнее описание аналогично описанию «геометрических вещественных точек». Действительно, вещественная точка многообразия $V_{\mathbb{R}}$ — это $\mathbb{R}$-морфизм $\operatorname{Spec}\mathbb{R} \to V_{\mathbb{R}}$, т. е. «сечение» отображения $V_{\mathbb{R}} \to \operatorname{Spec}\mathbb{R}$.

(iii) Это есть 2-адическое пополнение связной компоненты пространства отображений

$$\left\{\begin{matrix}\text{этальный гомото-}\\ \text{пический тип } \operatorname{Spec}\mathbb{R}\end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix}\text{этальный гомото-}\\ \text{пический тип } V_{\mathbb{R}}\end{matrix}\right\}.$$

[Пространство сечений расслоения

$$X_t \to \mathbb{R}P^\infty = \left\{\begin{matrix}\text{этальный гомото-}\\ \text{пический тип } \operatorname{Spec}\mathbb{R}\end{matrix}\right\}$$

гомотопически эквивалентно подмножеству пространства всех непрерывных отображений $\mathbb{R}P^\infty \to X_t$, состоящему из таких отображений, композиция которых с проекцией $X_t \to \mathbb{R}P^\infty$ индуцирует нетривиальный гомотопический класс отображений пространства $\mathbb{R}P^\infty$ в себя. В теоретическом отношении это описание наиболее удобно.]

Сейчас мы докажем условную теорему, а затем выведем из нее некоторые следствия.

Теорема 5.13. *Из топологической гипотезы о неподвижных точках следует, что все указанные описания 2-адического пополнения вещественного алгебраического многообразия правильны.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}_n$ — такая линейно упорядоченная система конечных локально направленных этальных покрытий комплексного многообразия $V_{\mathbb{C}}$, что (i) каждое покрытие $\mathcal{U}_n$ инвариантно относительно комплексного сопряжения; (ii) $V_{\mathbb{C}}^{\wedge} \cong \varprojlim\,[\text{нерв } C(\mathcal{U}_n)]$, где $C(\mathcal{U}_n)$ — описанная выше категория наименьших окрестностей.

Нам будет удобнее заменить категории $C(\mathcal{U})$ на большие, но гомотопически эквивалентные категории $C(\mathcal{U}, V)$, которые мы сейчас определим.

Объектами категории $C(\mathcal{U}, V)$ являются пары (U, x), где $x \in V$, а U — наименьшая окрестность точки x. Мы будем писать просто U_x. Морфизмы в категории $C(\mathcal{U}, V)$ определяются как коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} U_x \arrow[r] \arrow[dr] & U'_y \arrow[d] \\ & V_{\mathbb{C}} \end{tikzcd}$$

т. е. мы «забываем» про точки x и y.

Если $\mathcal{U}^1$ — утончение покрытия $\mathcal{U}$, то мы можем построить каноническое отображение

$$\text{нерв } C(\mathcal{U}^1, V) \to \text{нерв } C(\mathcal{U}, V).$$

Выберем теперь такую линейно упорядоченную систему $\mathcal{V}_n$ конечных локально направленных топологических покрытий, что (i) покрытие $\mathcal{V}_n$ является утончением покрытий $\mathcal{U}_n$ и $\mathcal{V}_{n-1}$; (ii) каждое множество из $\mathcal{V}_n$ инвариантно относительно комплексного сопряжения; (iii) каждое множество из $\mathcal{V}_n$ стягиваемо.

Тогда мы получаем каноническую диаграмму эквивариантных отображений

$$\begin{tikzcd} & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\ & \text{нерв } C(\mathcal{V}_n, V) \arrow[r] \arrow[d] & \text{нерв } C(\mathcal{U}_n, V) \arrow[d] \\ V_{\mathbb{C}} \arrow[ur, "f_n"] \arrow[r, "f_{n-1}"'] & \text{нерв } C(\mathcal{V}_{n-1}, V) \arrow[r] \arrow[d] & \text{нерв } C(\mathcal{U}_{n-1}, V) \arrow[d] \\ & {} & {} \end{tikzcd}$$

(чтобы построить отображение f_n, мы должны триангулировать многообразие $V_{\mathbb{C}}$ таким образом, что (a) комплексное сопряжение является кусочно линейным отображением; (b) для любого $U_\alpha \in \mathcal{V}_n$ множество $V_{\mathbb{C}} - U_\alpha$ является подкомплексом).

Из доказанного выше предложения следует, что отображения f_n являются гомотопическими эквивалентностями. Из этальной гомотопической теории следует, что проективный предел правого столбца является проконечным пополнением многообразия $V_{\mathbb{C}}$. Благодаря этому проконечное пополнение отображения

$$V_{\mathbb{C}} \times S^{\infty}/(\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{t} \mathbb{R}P^{\infty}$$

эквивалентно отображению

$$\varprojlim_{n} (\text{нерв}\, C(\mathcal{U}_n) \times S^{\infty}/(\mathbb{Z}/2))^{\wedge} \xrightarrow{a} \mathbb{R}P^{\infty}$$

(или отображению

этальный тип $V_{\mathbb{R}} \to$ этальный тип Spec $\mathbb{R}$).

Поэтому 2-адические пополнения пространств сечений этих отображений совпадают. Из топологической гипотезы о неподвижных точках следует, что в первом случае мы получим 2-адическое пополнение гомотопического типа многообразия вещественных точек. Теорема доказана.

Приведем теперь некоторые результаты, относящиеся к алгебраическому нахождению когомологий и K-функтора вещественного многообразия.

Когомологии. Обозначим через $\mathcal{R}$ кольцо когомологий группы $\mathbb{Z}/2$:

$$\mathcal{R} \cong (\mathbb{Z}/2)[x] \cong H^*(\mathbb{R}P^{\infty};\ \mathbb{Z}/2).$$

Из расслоения

$$V_{\mathbb{R}} \to \operatorname{Spec} \mathbb{R}$$

следует, что этальные $\mathbb{Z}/2$-когомологии многообразия $V_{\mathbb{R}}$ являются $\mathcal{R}$-модулями.

Из теории П. А. Смита (которая и сама легко выводится из приведенного выше «описания пространства X_t») вытекает

Следствие H.

$$H^*\begin{pmatrix}\text{многообразие}\\ \text{вещественных точек; } \mathcal{R}_x\end{pmatrix} \cong$$

$$\cong \left\{\begin{matrix}\text{этальные когомологии } V_{\mathbb{R}},\\ \text{локализованные по отношению}\\ \text{к простому идеалу } (x)\end{matrix}\right\} \cong$$

$$\cong H^*(V_{\mathbb{R}};\ \mathbb{Z}/2) \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}_x,$$

где $\mathcal{R}_x = (\mathbb{Z}/2)[x,\ x^{-1}]$ *есть кольцо* $\mathcal{R}$, *локализованное по отношению к простому идеалу* (x).

K-теория. Обозначим через $\hat{\mathcal{R}}$ групповое кольцо группы $\mathbb{Z}/2$ над 2-адическими числами

$$\hat{\mathcal{R}} = \hat{\mathbb{Z}}_2[x]/(x^2 - 1).$$

Из работ Атьи и Сигала по эквивариантной K-теории вытекает

Следствие K. *K-функтор многообразия* $|V_{\mathbb{R}}|$ *вещественных точек удовлетворяет соотношению*

$$K(|V_{\mathbb{R}}|) \otimes \hat{\mathcal{R}} \cong K\left(\begin{pmatrix}\text{этальный гомото-}\\ \text{пический тип } V_{\mathbb{R}}\end{pmatrix}_2^{\wedge}\right)^{1)}.$$

Сформулируем теперь интересное следствие, которое доказывается методами этой главы.

Следствие E. *Пусть* $\{f_i\}$ — *конечное множество многочленов с вещественными коэффициентами. Тогда система уравнений*

$$\{f_i = 0\}$$

имеет вещественное решение в том и только в том случае, когда вещественное многообразие, определенное этой системой уравнений, имеет нетривиальные этальные когомологии mod 2 *в бесконечном множестве размерностей.*

---

[1]) Правую часть этого равенства надо понимать так:

$$\varprojlim_{n}\ \varinjlim_{\substack{\text{этальные}\\ \text{покрытия } V_{\mathbb{R}}}} K(\text{нерв};\ \mathbb{Z}/2^n).$$

Доказательство. Мы докажем, что у вещественного алгебраического многообразия $V_{\mathbb{R}}$ есть вещественные точки, если его этальные когомологии mod 2 не обращаются в нуль в размерностях, больших, чем удвоенная комплексная размерность многообразия $V_{\mathbb{C}}$.

Если существует вещественная точка $p \in |V_{\mathbb{R}}|$, т. е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}\mathbb{R} \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & V_{\mathbb{R}} \arrow[d, "\text{«определяющее уравнение»}"] \\ & \operatorname{Spec}\mathbb{R} \end{tikzcd}$$

то ее этальная гомотопическая реализация показывает, что имеет место включение

$$H^*(\text{этальный тип } V_{\mathbb{R}};\ \mathbb{Z}/2) \supseteq H^*(\mathbb{R}P^\infty;\ \mathbb{Z}/2).$$

Если же нет вещественных точек, то группы

$$H^*(\text{этальный тип } V_{\mathbb{C}} \times S^\infty/(\mathbb{Z}/2);\ \mathbb{Z}/2)$$

тривиальны при $k > 2n$. Действительно, в этом случае

$$\text{этальный тип } V_{\mathbb{C}} \times S^\infty/(\mathbb{Z}/2) \cong \text{этальный тип } V_{\mathbb{C}}/(\mathbb{Z}/2),$$

но, как мы показали выше,

$$\text{этальный тип } V_{\mathbb{C}} \times S^\infty/(\mathbb{Z}/2) \underset{\text{2-адически}}{\cong} \text{этальный тип } V_{\mathbb{R}}.$$

Замечание. Приведенное выше описание X_t показывает, что при больших i группы

$$H^i(\text{этальный тип } V_{\mathbb{R}};\ \mathbb{Z}/2)$$

не зависят от i. Они являются прямой суммой всех когомологий mod 2 множества вещественных точек $V_{\mathbb{R}}$.

Глава 6

ГРУППА ГАЛУА В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ

Скомбинировав действие группы Галуа, описанное в предыдущей главе, с геометрической периодичностью в теории многообразий, мы получим естественное действие абелеанизированной группы Галуа на пополнениях грассманианов k-мерных кусочно линейных подпространств пространства $\mathbb{R}^\infty$. В этой главе мы изучаем возникающую симметрию в теории кусочно линейных расслоений и в некоторых других геометрических теориях.

Чтобы мотивировать это изучение, попытаемся понять, какая система инвариантов определяет компактное многообразие. Такую систему составляют гомотопический тип многообразия плюс некоторые дополнительные геометрические инварианты. Действительно, определим отображение

$$\left\{\begin{matrix}\text{компактные}\\ \text{многообразия}\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\Delta} \left\{\begin{matrix}\text{гомотопичес-}\\ \text{кие типы}\end{matrix}\ ,\ \begin{matrix}\text{«касательные}\\ \text{расслоения»}\end{matrix}\right\}.$$

При надлежащих определениях и предположениях отображение Δ инъективно и «уравнения, описывающие образ», почти известны.

Заметим, что понятие изоморфизма в правой части определяется довольно деликатным образом: (M, T_M) и (L, T_L) изоморфны, если имеется коммутативная диаграмма

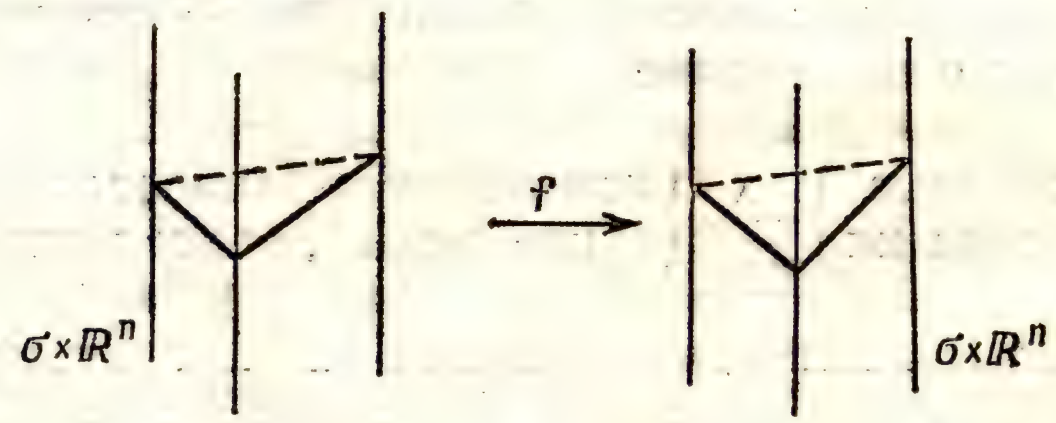
$$\begin{array}{ccc} T_M & \xrightarrow{dg} & T_L \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow[g]{} & L, \end{array}$$

в которой g есть гомотопическая эквивалентность, а dg есть изоморфизм между «касательными расслоениями» T_M и T_L, собственно гомотопный «теоретико-гомотопическому дифференциалу отображения g» — некоторой естественно определяемой собственной гомотопической эквивалентности между T_M и T_L[1]).

Таким образом, изучение многообразий сводится к изучению векторных расслоений, изоморфизмов между ними и способов деформировать послойную гомотопическую эквивалентность между векторными расслоениями в изоморфизм. Эти вопросы имеют теоретико-гомотопическую природу, и мы можем разложить и арифметизировать их по схеме гл. 2 и 3. При этом окажется, что «нечетные» компоненты кусочно линейных и топологических вопросов обладают удивительно красивой структурой, включающей в себя гармонично согласованные друг с другом четырехшаговую периодичность и симметрию Галуа.

§ 1. КУСОЧНО ЛИНЕЙНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

Рассмотрим «блок гомеоморфизмов»



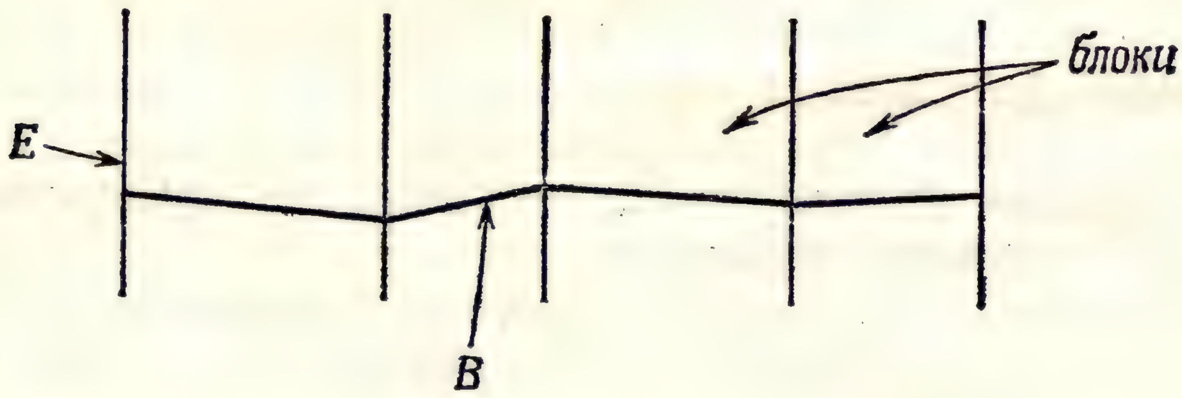
где σ — симплекс и отображение f удовлетворяет двум условиям: (i) оно является кусочно линейным гомеоморфизмом; (ii) если τ — грань σ, то f переводит $\tau\times\mathbb{R}^n$ в $\tau\times\mathbb{R}^n$, т. е. f «сохраняет блоки».

Такое отображение определяет симплекс кусочно линейной группы PL_n, лежащей в основе теории

---

[1]) Относительно определения dg см. Sullivan D., Thesis, Princeton, 1966.

«$\mathbb{R}^n$-блочных расслоений»:

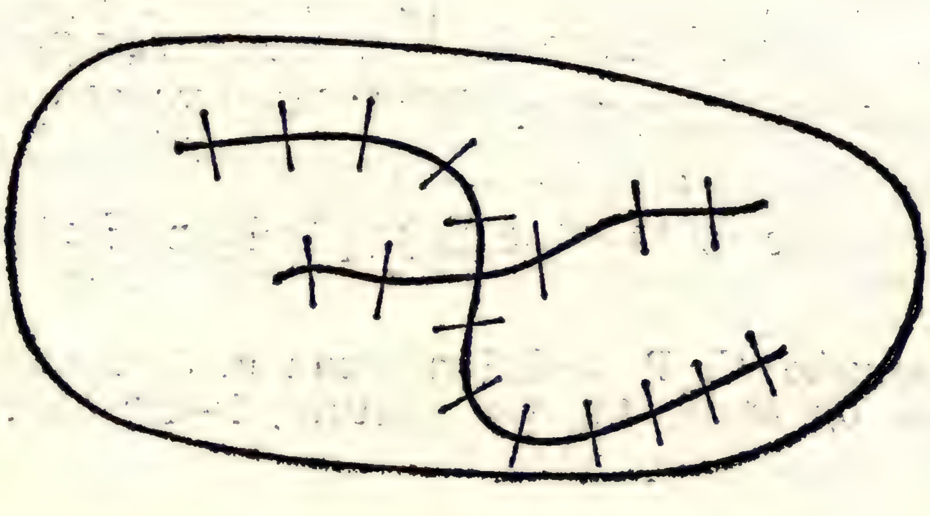


Тотальное пространство E такого расслоения обладает разбиением на блоки $\sigma \times \mathbb{R}^n$, соответствующие симплексам «базы» B, вложенным в E как «нулевые сечения»:

$$\sigma \times \{0\} \subseteq \sigma \times \mathbb{R}^n.$$

Понятие изоморфизма сводится к кусочно линейному изоморфизму пары полиэдров (E, B). Классы изоморфных блочных расслоений составляют правильную «теорию расслоений»: они соответствуют гомотопическим классам отображений в «PL-грассманиан» $G_n(PL)$ (или BPL_n — классифицирующее пространство группы PL_n).

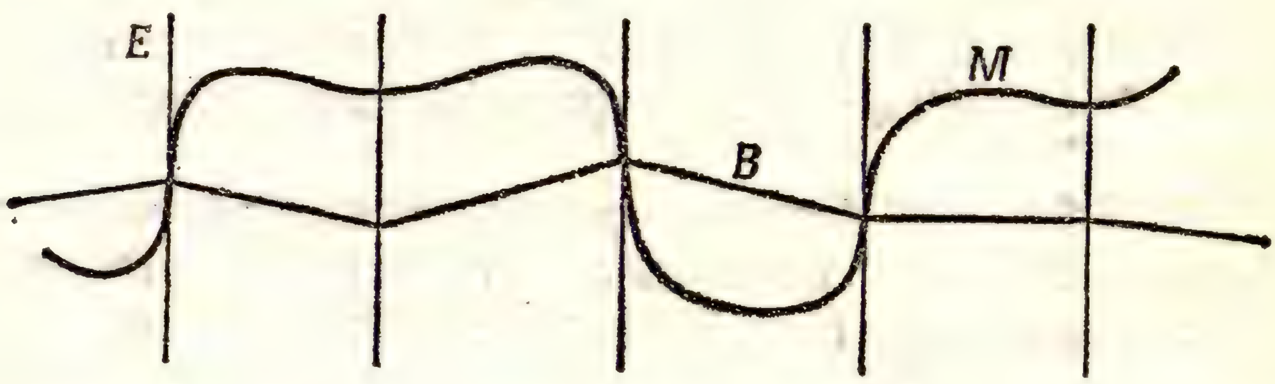
Тот факт, что блочные расслоения образуют функтор, нетривиален, поскольку отсутствует «геометрическая проекция» $E \to B$ (а определена только теоретико-гомотопическая проекция). Отсутствие «геометрической проекции» восполняется тем, что теоремы о трубчатых окрестностях остаются справедливыми: подмногообразия обладают окрестностями, однозначно разбиваемыми на блоки



и конструкции, связанные с трансверсальностью, можно осуществлять, используя блоки. (Автору кажется, что категория полиэдров вместе с теорией блочных расслоений является наиболее широкой и естественной областью, в которой осуществимы *геометрические* конструкции, связанные с трансверсальностью и пересечением.)

Заметим, что ввиду отсутствия «геометрической проекции» теоретико-гомотопическое «ненулевое сечение» блочного расслоения может не иметь геометрической реализации.

Трансверсальные конструкции. Рассмотрим замкнутое подмногообразие M^{n+l} тотального пространства E n-мерного блочного расслоения. Если «база» B компактна, то с помощью изотопии с компактным носителем можно сделать M трансверсальным к B[1]), а пересечение M с окрестностью B — объединением пересечения блоков с этой окрестностью:



Пересечение V^l многообразия M с B является тогда компактным многообразием и одновременно подполиэдром B. Следует обратить внимание на несколько обстоятельств.

(i) Если многообразие M^{n+l} изменяется посредством собственного кобордизма $W^{n+l+1} \subseteq E \times [0, 1]$, то V изменяется посредством кобордизма, определяемого как пересечение W^{n+l+1} с $B \times [0, 1]$ в $E \times [0, 1]$.

---

[1]) См. Rourke C. P. and Sanderson B. J., Block bundles, I, II, III, *Ann. of Math.* 87, No. 1 (1968), 1—28; 87, No. 2 (1968), 256—278; 87, No. 3 (1968), 431—483.

(ii) Собственное отображение $f: M \to E$ можно сделать трансверсальным к B, сделав график отображения f трансверсальным к $M \times B$. При этом мы получим собственное отображение $V \to B$.

(iii) Можно пересекать с B не только многообразия, но и произвольный полиэдр X. При этом пересечение имеет особенности того же типа, что и X. Рассмотрим, например, $\mathbb{Z}/n$-подмногообразие $X \subseteq E$, т. е. полиэдр, который получается из многообразия, граница которого состоит из n одинаковых частей при склеивании этих частей. Тогда пересечение X с B тоже является $\mathbb{Z}/n$-многообразием. Можно также говорить о $\mathbb{Z}/n$-кобордизмах, и при этом сохраняется свойство (i).

(iv) Переходя к классам кобордантных собственных отображений $M \to E$ и классам кобордантных отображений $V \to B$, мы получаем абелевы группы (относительно дизъюнктного суммирования) $\Omega_* E$ и $\Omega_* B$, и предыдущие конструкции доставляют томовский гомоморфизм пересечения

$$\Omega_* E \xrightarrow{\cap B} \Omega_* B$$

и его $\mathbb{Z}/n$-аналог

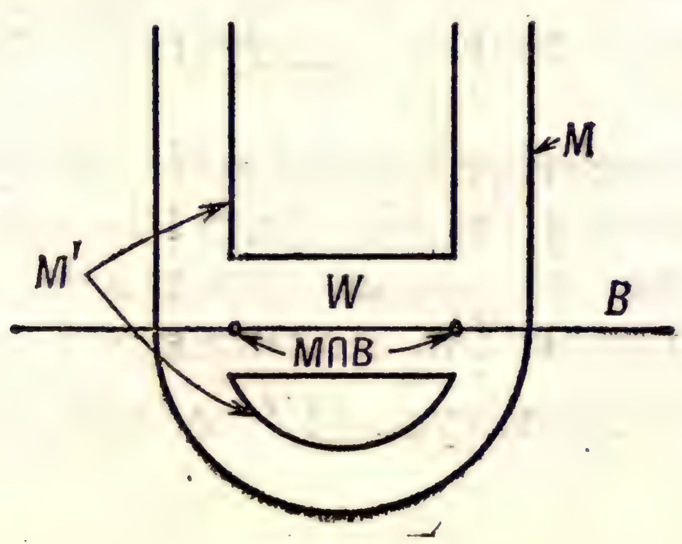
$$\Omega_* (E;\ \mathbb{Z}/n) \xrightarrow{\cap B} \Omega_* (B;\ \mathbb{Z}/n).$$

Предложение 6.1. *Гомоморфизм Тома*

$$\Omega_* E \xrightarrow{\cap B} \Omega_* B$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Если $M \cap B = \partial W$, где $W \subseteq B$, то мы можем построить кобордантное M многообразие M', которое не пересекается с B, используя в качестве пленки объединение замкнутых блоков над W; схематически это показано на рисунке:



Далее, используя тот факт, что пространство, получаемое из одноточечного пополнения пространства E выкидыванием B, стягиваемо, мы можем «отправить M' на бесконечность» посредством собственного отображения $M' \times \mathbb{R} \to E - B$. Таким образом, отображение $\cap B$ мономорфно.

Что это отображение эпиморфно, очевидно, поскольку для любого подмногообразия $V \subseteq B$ имеет место равенство

$$(\text{блоки над } V) \cap B = V.$$

Заметим, что если E ориентировано посредством класса когомологий

$$U \in H^n(E,\ E - B;\ \mathbb{Z}),$$

то изоморфизм Тома, подобный предыдущему, имеется и между теориями ориентированных кобордизмов (которые мы тоже будем обозначать через Ω_*).

Если определить ориентированные $\mathbb{Z}/n$-многообразия как полиэдры, полученные при склеивании согласованных ориентированных граничных компонент, то мы получим ориентированный $\mathbb{Z}/n$-изоморфизм Тома

$$\Omega_*(E;\ \mathbb{Z}/n) \xrightarrow[\cong]{\cap B} \Omega_*(B;\ \mathbb{Z}/n).$$

Сигнатурные инварианты и целочисленность. Изоморфизм Тома

$$\Omega_* E \xrightarrow[\cong]{\cap B} \Omega_* B$$

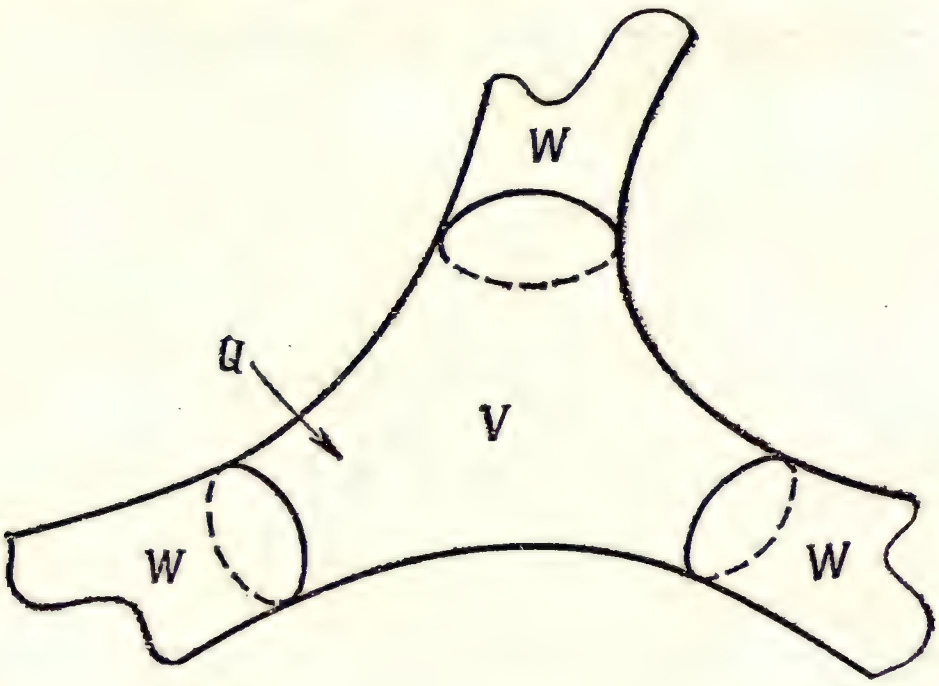
является основным геометрическим инвариантом блочного расслоения E. Чтобы использовать его, мы рассмотрим числовые инварианты, связанные с перестройками многообразий.

Для произвольного $x \in H_{4i}(V;\ \mathbb{Q})$ определим сигнатуру как сигнатуру квадратичной формы L_x на $H^{2i}(V;\ \mathbb{Q})$, определяемой равенством $L_x(y) = \langle y^2, x\rangle$, $y \in H^{2i}(V;\ \mathbb{Q})$.

Если V — ориентированное многообразие, то сигнатура является целым числом. Если V — ориентированное $\mathbb{Z}/n$-многообразие, то можно определить его сигнатуру как элемент группы $\mathbb{Z}/n$, положив

$$\text{сигнатура } V = \text{сигнатура } (V/\text{особенности } V) \bmod n.$$

Эти сигнатуры являются инвариантами кобордизма. Например, если $\mathbb{Z}/n$-многообразие V кобордантно нулю, то этот кобордизм можно расклеить:



где Q и W построены по кобордизму между V и $\emptyset$ [1]). Тогда

$$0 = \text{сигнатура } \partial Q = \text{сигнатура } V + n \cdot \text{сигнатура } W.$$

Здесь используются аддиционная лемма Новикова для сигнатуры многообразий с краем (определяемой как сигнатура $W/\partial W$) [2]) и инвариантность обычной сигнатуры относительно кобордизмов (Том) [3]).

Эти соотношения между сигнатурами доказываются на основании простых и приятных соображений двойственности.

---

[1]) Поясним эту конструкцию. Сначала мы «расклеиваем» наше (Z/n)-многообразие V, т. е. возвращаемся к многообразию $\widetilde{V}$ с границей, составленной из n одинаковых кусков, из которого было построено V. Затем то же делается с пленкой, натянутой на V. Получается многообразие с краем $V + nW$, где W — пленка, натянутая на $1/n$ границы многообразия $\widetilde{V}$. — *Прим. ред.*

[2]) См. Новиков С. П., Характеристические классы Потрягина, «Труды международного конгресса математиков», «Мир», М., 1966, стр. 158 — 159, или Pontrjagin classes, the fundamental group and some problems of stable algebra, Essays Topol. and Rel. Topics, Berlin, 1970. — *Прим. ред.*

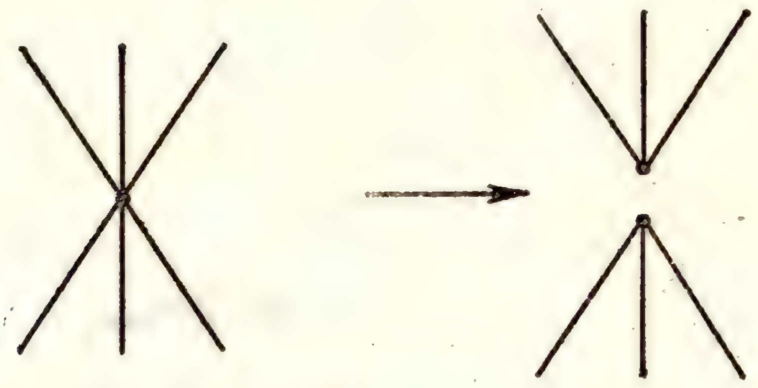
[3]) Этот результат получен независимо Р. Томом (диссертация) и В. А. Рохлиным (Новые результаты теории четырехмерных многообразий, *ДАН СССР*, 84, № 2 (1952), 221 — 224). — *Прим. ред.*

Отметим теперь, что можно определить

(i) коэффициентные гомоморфизмы:

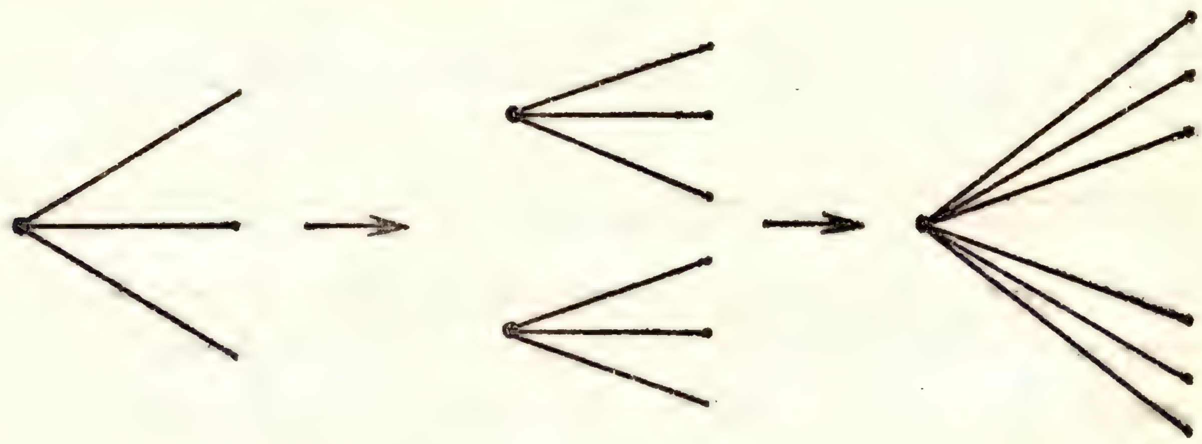
$$\Omega_*(\ ;\mathbb{Z}/kn) \leftrightarrows \Omega_*(\ ;\mathbb{Z}/n),$$

которые строятся при помощи частичного расклеивания[1])



(На рисунке $k=2$, $n=3$)

размножения и склеивания



(ii) точную лестницу

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots \to \Omega_i(\ ) & \xrightarrow{\cdot n} & \Omega_i(\ ) & \to & \Omega_i(\ ;\mathbb{Z}/n) & \to & \ldots \\
\downarrow & & \downarrow k & & \downarrow & & \\
\ldots \to \Omega_i(\ ) & \xrightarrow{\cdot kn} & \Omega_i(\ ) & \to & \Omega_i(\ ;\mathbb{Z}/kn) & \to & \ldots
\end{array}$$

отображения в которой строятся геометрически.

Поэтому мы можем определить

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\text{-бордизмы } \Omega_*(\ ;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \varinjlim_n \Omega_*(\ ;\mathbb{Z}/n);$$

$$\mathbb{Q}\text{-бордизмы } \Omega_*(\ ;\mathbb{Q}) = \varinjlim_k (\Omega_*(\ ) \xrightarrow{k} \Omega_*(\ ))$$

---

[1]) Аналогично «частичной нормализации» вещественного многообразия.

и точную последовательность

$$\ldots \to \Omega_*(\ \ ) \to \Omega_*(\ \ ;\mathbb{Q}) \xrightarrow{t} \Omega_*(\ \ ;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \ \ldots;$$

Определение (сигнатурный инвариант блочного расслоения). Скомпонируем операции: (i) пересечения с нулевым сечением; (ii) взятия сигнатуры пересечения. Получается «сигнатурный инвариант блочного расслоения»

$$\sigma(E) = \begin{tikzcd} \Omega_*(E;\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[d, "t"'] & \mathbb{Q} \arrow[d] \\ \Omega_*(E;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\substack{\nearrow\\ \text{сигнатура}\\ \text{пересечения}\\ \searrow}"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{tikzcd}\ [1]).$$

Мы предполагаем, что E ориентировано.

Рациональная часть сигнатурного инварианта несет в точности ту же информацию, что и рациональный характеристический класс

$$1 + L_1 + L_2 + \ \ldots \in \prod H^{4i}(B;\ \mathbb{Q})$$

расслоения E. Расширение рациональной сигнатуры до $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-сигнатуры можно рассматривать как каноническую теорему целочисленности для рациональных характеристических классов блочного расслоения [2]).

Чтобы сформулировать эти теоремы целочисленности более явно, рассмотрим локализации

$$K^n(E_l) = KO^n(E)_c \otimes \mathbb{Z}_l \quad (n \text{ — размерность слоя}),$$

$$H^{4*}(B)_2 = \prod_{i=0}^{\infty} H^{4i}(B;\ \mathbb{Z}_{(2)}).$$

---

[1]) Сигнатурным инвариантом называется вся диаграмма. — *Прим. ред.*

[2]) Действительно, наличие диаграммы означает, что гомоморфизм «сигнатура пересечения с B» переводит ядро гомоморфизма t (т. е. образ $\Omega^*(E)$) в ядро проекции $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (т. е. в $\mathbb{Z}$). — *Прим. ред.*

Напомним, что

$\mathbb{Z}_{(2)}$ = целые числа, локализованные по отношению к простому числу 2;

$\mathbb{Z}_l$ = целые числа, локализованные относительно множества l нечетных простых чисел;

$KO_c^n = KO^n$ (одноточечная компактификация E);

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \bigoplus_p \mathbb{Z}/p^\infty = \bigoplus_p \varinjlim_n \mathbb{Z}/p^n.$$

Теорема 6.2. *Рациональный характеристический класс*

$$1 + L_1 + L_2 + \ldots \in \prod H^{4i}(B;\ \mathbb{Q})$$

кусочно линейного ориентированного блочного расслоения E над B, определяемый рациональной частью сигнатуры расслоения E, удовлетворяет двум каноническим условиям целочисленности:

(i) (*относительно простого числа* 2) *существует канонический «целочисленный класс когомологий» $\mathscr{L}_E \in \in H^{4*}(B)_2$, переходящий в L_E при естественном гомоморфизме, индуцированном вложением $\mathbb{Z}_{(2)} \to \mathbb{Q}$*[1];

(ii) (*относительно нечетных простых чисел*) *существует канонический класс*

$$\Delta_E \in K(E)_l, \qquad l = \left\{\begin{matrix}\text{нечетные простые}\\ \text{числа}\end{matrix}\right\},$$

характер Понтрягина $\mathrm{ph}\,\Delta_E \in H_c^{4*}(E)$ которого переходит в L при изоморфизме Тома, точнее

$$\mathrm{ph}\,\Delta_E = L_E \cdot (\text{класс Тома})$$

ph — *характер Чжэня комплексификации Δ_E*);

(iii) *$\mathscr{L}_E$ определяется по L_E и 2-адической части $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-сигнатуры блочного расслоения E; Δ_E определяется по L_E и l-адической части $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-сигнатуры E.*

Замечания. Инварианты Δ_E и $\mathscr{L}_E$ зависят только от «стабильного класса расслоения E», т. е. от класса расслоения $E \times \mathbb{R}^k$ с большим k. Если B есть замкнутое многообразие и размерность слоя четна, то пересе-

---

[1]) Утверждение (i) далее не используется.

чение $B \cap B$ (в E) является классом гомологий, двойственным по Пуанкаре классу Эйлера расслоения E, т. е. «нестабильным инвариантом». Если этот класс тривиален, то B гомологично некоторому циклу в $E - B$. Если пересечение $B \cap B$ кобордантно нулю в $B \times I$, то B кобордантно в $E \times I$ некоторому подмногообразию $E - B$ (по причинам, аналогичным предыдущим).

Мы покажем, что

(i) L и рациональный класс Эйлера образуют полную систему рациональных инвариантов расслоения E (с четномерными слоями); множество расслоений (почти) является «решеткой» в множестве этих инвариантов;

(ii) Δ_E и гомотопический класс отображения $E - B \to B$ образуют полную систему инвариантов по отношению к простым нечетным числам[1]); по отношению к простому числу 2 расслоение E определяется классом когомологий $\mathscr{L}_E$, гомотопическим классом отображения $E - B \to B$ и некоторым дополнительным инвариантом 2-кручения $\mathscr{K}$. Точное определение и геометрический смысл инварианта $\mathscr{K}$ еще не ясны.

В дальнейшем мы будем рассматривать только нечетные простые числа и использовать инвариант $\Delta_E \in K(E)_l$. С его помощью мы определим симметрии Галуа в кусочно линейной теории. Конструкция «расслоения» Δ_E будет приведена ниже.

Кроме алгебраических применений Δ_E к кусочно линейной теории должны существовать и «аналитические применения». Например, если E — гладкое векторное расслоение, то Δ_E можно построить с помощью «оператора Лапласа в E». Мы надеемся в дальнейшем заняться «аналитическими приложениями» инварианта Δ_E к PL-теории.

§ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ K-ТЕОРИИ

Мы укажем теперь замечательную геометрическую характеристику элементов K-функтора (вещественного K-функтора, локализованного в нечетных простых числах).

---

[1]) То есть после пополнения по этим простым числам.

Грубо говоря, элементы из $K(X)$ являются «геометрическими коциклами», которые относят каждому гладкому $\mathbb{Z}/n$-многообразию в X класс вычетов mod 1 [1]). Этот коцикл инвариантен относительно кобордизма, согласован с заменой модуля n и обладает свойством периодичности.

Имеется другая точка зрения на этот предмет. Геометрические аспекты теории многообразий приводят к четырехшаговой периодичности в классифицирующем пространстве для послойных гомотопических эквивалентностей между PL-расслоениями. Эта 4-периодичность тесно связана с изучением геометрических инвариантов многообразий, не выражающихся через гомотопический тип или через действие группы π_1 на универсальной накрывающей.

Теория препятствий в этой геометрической теории обладает поразительным свойством в духе теории инвариантов, относящимся к «геометрическим коциклам» (относительно всех простых чисел). Это можно показать с помощью геометрических рассуждений, использующих многообразия с «особенностями типа джойна» [2]).

Автору кажется, что такой путь пригоден для получения этой геометрической теоремы для вещественного K-функтора, локализованного в нечетных простых числах (в этом случае периодичность Ботта совпадает с «геометрической периодичностью»). Однако доказательство геометрической теоремы о коциклах (в нечетных простых числах) сильно упростится, если привлечь K-теорию вместе с действием в ней группы Галуа. Говоря короче, геометрическая интуиция, необходимая для этой теоремы из K-теории, приходит из теории многообразий, а симметрия Галуа в теории многообразий возникает из K-теории.

---

[1]) Существует хорошая аналитическая интерпретация этих вычетов.

[2]) Автор надеется, что какой-нибудь молодой, не испорченный, геометрически мыслящий математик сможет восстановить и развить эти рассуждения.

Сформулируем теперь теорему о геометрических коциклах.

Обозначим через $\Omega_*^l(X; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ нечетную часть в подгруппе группы $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-бордизмов, состоящей из классов гладких многообразий:

$$\Omega_*^l(X; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \varinjlim_{n \text{ нечетно}} \left\{ \begin{matrix} \text{классы кобордизмов гладких} \\ \mathbb{Z}/n\text{-многообразий в } X \end{matrix} \right\}.$$

Рассмотрим, далее, группу

$$\left\{ \begin{matrix} \text{конечные геометри-} \\ \text{ческие коциклы} \end{matrix} \right\}^0 \subseteq \{\Omega_{4*}^l(X; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\},$$

состоящую из гомоморфизмов λ, удовлетворяющих следующему «условию периодичности»: для любого бордизма $V^{4i} \to X$ и замкнутого $4l$-многообразия M имеет место равенство

$$\lambda((V^{4i} \to X) \times (M^{4l} \to \mathrm{pt})) = (\text{сигнатура } M) \cdot \lambda(V \to X).$$

Подобным же образом рассмотрим группу

$$\left\{ \begin{matrix} \text{геометрические} \\ \text{коциклы над } \mathbb{Q} \end{matrix} \right\}^0 \subseteq \{\Omega_{4*}(X; \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}\}$$

гомоморфизмов[1]), удовлетворяющих такому же условию периодичности.

Теорема 6.3. *Для всякого конечного комплекса X имеются естественные изоморфизмы*

$$K(X)_0 \cong \left\{ \begin{matrix} \text{геометрические} \\ \text{коциклы на } X \\ \text{над } \mathbb{Q} \end{matrix} \right\}^0,$$

$$K(X)^\wedge \cong \left\{ \begin{matrix} \text{конечные} \\ \text{геометрические} \\ \text{коциклы на } X \end{matrix} \right\}^0.$$

Здесь через $K(X)_0$ обозначена локализация группы $K(X)$ в нуле, т. е. $KO(X) \otimes \mathbb{Q}$, а через $K(X)^\wedge$ — проконечное

---

[1]) Определенных для гладких или PL-многообразий в X; над $\mathbb{Q}$ эти теории совпадают.

пополнение группы $KO(X)$ (относительно групп нечетного порядка).

Замечания. (a) Эти изоморфизмы определяются условием, что при $X = \mathrm{pt}$

$$\left(\Omega_{4*}^{(\mathrm{pt})} \xrightarrow{\text{сигнатура}} \mathbb{Z}\right) \otimes \mathbb{Q} \cong 1 \in K(\mathrm{pt})_0 = \mathbb{Q}.$$

(b) Как будет видно из доказательства, изоморфизм в теореме 6.3 индуцирует отображение теории когомологий, т. е. геометрические коциклы, определенные на $(4i + j)$-мерных многообразиях, инвариантные относительно кобордизма и удовлетворяющие формуле периодичности, определяют элементы групп $K^j(X)_0$ или $K^j(X)^\wedge$.

(c) Элементы групп $K(X)_0$ и $K(X)^\wedge$, являющиеся образами геометрических коциклов, доставляют совершенно независимую информацию. В то же время из условий целочисленности, связывающих рациональные и конечные геометрические коциклы, т. е. из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Omega_*(X;\ \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\sigma_{\mathbb{Q}}} & \mathbb{Q} \\ \downarrow{\scriptstyle t} & & \downarrow \\ \Omega_*(X;\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sigma_f} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

видно, что оба они происходят из одного элемента группы

$$K(X) = KO(X) \otimes \mathbb{Z}[1/2].$$

Для доказательства заметим, что имеется точная последовательность

$$0 \to K(X) \xrightarrow{i \oplus j} K(X)^\wedge \oplus K(X)_0 \xrightarrow{l-c} [K(X)_{\text{адели}}]_l \to 0,$$

где l — множество всех нечетных простых чисел, соответствующее арифметическому квадрату гл. 1 для групп. Из условий целочисленности вытекает, что отображение $\sigma_{\mathbb{Q}}$ принимает целые значения на решетке

$$\Omega_*(X) \subseteq \Omega_*(X;\ \mathbb{Q}).$$

Из этого в свою очередь следует, что элемент группы

$$K(X)^{\wedge} \otimes \mathbb{Q} = [K(X)_{\text{адели}}]_l,$$

отвечающий σ_f, «рационален» и, более того, является образом элемента, определяемого $\sigma_{\mathbb{Q}}$ (после умножения на $\hat{\mathbb{Z}}_l$).

Следствие 6.4. *Сигнатурный инвариант*

$$\sigma(E) = \begin{array}{ccc} \Omega_*(E;\ \mathbb{Q}) & \to & \mathbb{Q} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_*(E;\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \to & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

блочного PL-расслоения E над конечным комплексом определяет канонический элемент в K-функторе с компактным носителем

$$\Delta_E \in K_c^d(E) \qquad (d = \dim E).$$

Доказательство следствия. Рассмотрим сужение сигнатурного инварианта на подгруппу группы $\Omega_*(E^+;\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, порожденную гладкими $\mathbb{Z}/n$-многообразиями размерности $4i+d$, где n — нечетное число[1]. Ясно, что это ограничение также удовлетворяет условию периодичности. Таким образом, мы определили конечный геометрический коцикл «степени d».

Аналогично определяется геометрический $\mathbb{Q}$-коцикл.

Согласно теореме 6.3, эти коциклы определяют элементы групп $K_c(E)^{\wedge}$ и $K_c(E)_0$. Из условий целочисленности (см. замечание (с)) вытекает, что эти элементы определяют канонический элемент в группе $K_c(E)$.

Приступая к доказательству теоремы, мы прежде всего построим отображение

$$K(X) \xrightarrow{\Delta} \left\{ \begin{array}{c} \text{геометрические} \\ \text{коциклы} \end{array} \right\}.$$

В действительности эта конструкция позволяет также построить явно элемент Δ_E (см. следствие).

---

[1]) Сигнатурный инвариант равен нулю на классах кобордизмов, реализованных многообразиями другой размерности; E^+ — одноточечная компактификация пространства E.

Пусть γ — каноническое векторное расслоение над грассманианом BSO_{4n}. Рассмотрим элемент

$$\Delta_{4n} = \frac{\Lambda^+ - \Lambda^-}{\Lambda^+ + \Lambda^-} \in KO_c(\gamma) \otimes \mathbb{Z}[1/2]$$

($\Lambda^+ \oplus \Lambda^-$ — каноническое разложение внешней алгебры Λ расслоения γ в сумму собственных подпространств оператора Ходжа $*$ относительно какой-нибудь римановой метрики на γ).

Пояснения. (a) Группа $KO_c(\gamma) = KO(\mathrm{Thom}; \gamma) = KO(MSO_{4n})$ изоморфна ядру гомоморфизма сужения

$$KO(BSO_{4n}) \to KO(BSO_{4n-1}).$$

(b) Каждому конечномерному вещественному представлению группы SO_{4n} соответствует элемент кольца $KO(BSO_{4n})$. Мы будем рассматривать внешнюю алгебру Λ $4n$-мерного пространства (слоя расслоения γ) как пространство естественного представления группы SO_{4n}. Обозначим через $\Lambda_\pm$ собственные ± 1-пространства инволюции α: $\Lambda \to \Lambda$, определяемой клиффордовым умножением на элемент объема в Λ^{4n} (т. е. $\alpha = (-1)^i *: \Lambda^i \to \Lambda^{4n-i}$, где $*$ есть оператор Ходжа).

(c) Так как размерность представления $\Lambda_+ \otimes \Lambda_-$ равна 2^{4n}, то соответствующий элемент кольца $KO(BSO_{4n}) \oplus \mathbb{Z}[1/2]$ обратим.

(d) Сужения представлений Λ_+ и Λ_- на $SO_{4n-1} \subseteq SO_{4n}$ эквивалентны. Поэтому элемент $\dfrac{\Lambda_+ - \Lambda_-}{\Lambda_+ + \Lambda_-}$ лежит в ядре гомоморфизма сужения

$$(KO(BSO_{4n}) \to KO(BSO_{4n-1})) \otimes \mathbb{Z}[1/2].$$

(e) Сужение элемента $\Delta_{4n} \in KO_c(\gamma_{4n}) \otimes \mathbb{Z}[1/2]$ на слой $(\mathbb{R}^{4n})^+$ является образующей группы $KO_c(\mathbb{R}^{4n}) \otimes \mathbb{Z}[1/2]$ и, более того, равен произведению 2^{-2n} на естественную целочисленную образующую, определяемую посредством $\Delta_+ - \Delta_-$, где Δ_+ и Δ_- — «основные спинорные представления», строящиеся с помощью клиффордовой алгебры пространства $\mathbb{R}^{4n}$.

(f) Мы будем рассматривать K-теорию $K^0, K^1, K^2, \ldots$ ($KO \otimes \mathbb{Z}[1/2]$) как теорию когомологий с периодом 4, причем изоморфизм периодичности задается умножением на элемент $\Delta_4 \in KO_c(\mathbb{R}^4) \otimes \mathbb{Z}[1/2]$:

$$KO(X) \xrightarrow[x \mapsto x \cdot \Delta_4]{\cong} KO_c(X \times \mathbb{R}^4).$$

(g) Элементы Δ_{4n} ведут себя мультипликативно при естественном отображении

$$BSO_{4q} \times BSO_{4r} \to BSO_{4(q+r)},$$

т. е. в группе $KO_c(\gamma_{4q} \times \gamma_{4r}) \otimes \mathbb{Z}[1/2]$ имеет место равенство

$$\Delta_{4(q+r)}/(\gamma_{4q} \times \gamma_{4r}) = \Delta_{4q} \times \Delta_{4r}.$$

(Я благодарен Атье и Сигалу за беседу об этом предмете.)

Возвратимся к доказательству теоремы. Элементы Δ_{4n} определены в K-функторе классифицирующих пространств теории бордизмов

$$\{MSO_{4n}\} = \{\mathrm{Thom}\,\gamma_{4n}\}.$$

Поэтому они определяют естественные отображения

$$\left\{\begin{matrix}\text{теория гладких}\\ \text{бордизмов}\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\Delta} K\text{-теория}$$

как на уровне гомологий, Δ_*, так и на уровне когомологий, Δ^*, и при этом Δ_* связано с Δ^* двойственностью Александера.

Таким образом, гладкие многообразия можно рассматривать как циклы в K-теории. В частности, для любого $\nu \in K^i(X)$ и любого n-мерного многообразия M в X можно образовать пересечение

$$(M \to X) \cap \nu \in K^{n-i}(\mathrm{pt}).$$

Если M есть $\mathbb{Z}/k$-многообразие, то, как легко понять, подобная конструкция доставляет элемент группы $K^{n-i}(\mathrm{pt}) \otimes \mathbb{Z}/k$ [1]).

---

[1]) Технически это основано на легко доказываемом факте, что Z/k-многообразия представляют «бордизмы с коэффициентами в Z/k». Отображение можно построить по соображениям трансверсальности, а его изоморфность доказывается посредством коэффициентной точной последовательности.

Так как отображение Δ мультипликативно ($\Delta_{4n} \times \Delta_{4l} \cong \Delta_{4(n+l)}$), то

$$((M \to X) \times (V \to \mathrm{pt})) \cap \nu = \Delta(V)(\nu \cap (M \to X)),$$

где $\Delta[V] \in K_v(\mathrm{pt})$, $v = \dim V$.

Чтобы вычислить $\Delta(V)$, найдем сначала «характер Δ» — формальный ряд, задающий отображение $\eta \mapsto \phi^{-1} \operatorname{ph} \Delta(\eta)$ [1]), где ϕ — изоморфизм Тома:

$$\begin{aligned}(\phi^{-1} \operatorname{ph} \Delta)_{\mathrm{germ}} &= \left(\phi^{-1} \operatorname{ph} \frac{\Lambda^+ - \Lambda^-}{\Lambda^+ + \Lambda^-}\right)_{\mathrm{germ}} = \\ &= \left(\phi^{-1} \operatorname{ch} \frac{\Lambda^+ - \Lambda^-}{\Lambda^+ + \Lambda^-} \otimes \mathbb{C}\right)_{\mathrm{germ}} = \\ &= \frac{1}{x} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\operatorname{th} x}{x} = (L\text{-род})^{-1}_{\mathrm{germ}}.\end{aligned}$$

При вычислении $\Delta(V)$ мы используем характеристические классы нормального расслоения. Поэтому

$$\begin{aligned}\Delta(V) &= \langle 1/L(\text{нормальное расслоение } V), V\rangle = \\ &= \langle L(\text{касательное расслоение } V), V\rangle = \\ &= \text{сигнатура } V\end{aligned}$$

(последнее следует из известной формулы Хирцебруха). Таким образом, каждый элемент кольца $K(X)$ определяет геометрические коциклы

$$K(X) \xrightarrow{\Delta_f} \{\text{конечные геометрические коциклы}\},$$

$$K(X) \xrightarrow{\Delta_{\mathbb{Q}}} \{\text{геометрические } \mathbb{Q}\text{-коциклы}\}\ ^{2}).$$

---

[1]) Объясним, что такое germ. Всякое отображение F комплексного K-функтора в когомологии, обладающее свойством аддитивности: $F(\eta + \xi) = F(\eta) \cdot F(\xi)$, может быть описано следующим образом. Вследствие принципа расщепления отображение F определяется своим сужением на множество обратимых расслоений и, следовательно, своим значением $F(\eta_0) = \sum a_i x^i$, где η_0 — каноническое линейное расслоение над $\mathbb{C}P^\infty$, а $x \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$ — каноническая образующая. Формальный ряд $\sum a_i t^i$ определяет отображение F и обозначается через F_{germ}. — *Прим перев.*

[2]) Заметим, что имеется более прямое описание Δ, использующее эквивариантное вложение расклеенного $(\mathbb{Z}/k)$-многообра-

Для изучения отображения Δ_f рассмотрим снова естественное отображение Δ_* теории бордизмов $\otimes \mathbb{Z}[1/2]$ в K-теорию. Применяя теорию препятствий к универсальным пространствам, можно прямо убедиться в том, что Δ_* есть эпиморфизм[1]). Подробнее, пусть $M = \varinjlim (MSO_n)_l$ и $B = BO_l$, где l — множество нечетных простых чисел. Расслоения Δ_{4n} определяют отображение (Δ): $M \to B$, и отображение Δ_* есть не что иное, как отображение

$$\Omega_*(X) \otimes \mathbb{Z}[1/2] = \pi_*^s(M \# X) \to K_*(X) = \pi_*^s(B \# X),$$

индуцированное отображением $(\Delta) \# \mathrm{id}$: $M \# X \to B \# X$, где $\#$ обозначает приведенное произведение (фактор-пространство обычного произведения по координатному кресту), π_*^s — стабильные гомотопические группы $[\pi_q^s(Y) = \lim \pi_{q+n}$ (n-я надстройка над Y)]. Но отображение (Δ) обладает сечением. Действительно,

$$H^*(B;\ \pi_{*-1}(\text{слой}\,(\Delta))) \cong$$

$$\cong H^*\left(B;\ \begin{pmatrix}\text{идеал в } \Omega_*,\\ \text{определяемый}\\ \text{многообразиями с}\\ \text{нулевой сигнатурой}\end{pmatrix}_{*-1} \otimes \mathbb{Z}[1/2]\right) = 0,$$

и препятствия к распространению этого сечения тривиальны. Следовательно, имеет сечение и отображение $(\Delta) \# \mathrm{id}$, т. е. Δ_* — эпиморфизм.

зия M в $D_*^2 \times \mathbb{R}^N$, где D_*^2 — двумерный диск с обычным действием группы Z/k на границе. Если заданы Z/k-бордизм f: $M/(Z/k)\,\partial \to X$ и $4k$-мерное векторное расслоение ν над X, то нужно взять прямой образ расслоения $f^*\nu$ в $(D_*^2 \times \mathbb{R}^N)/(Z/k)\,\partial$ и его значение на образующей группы K-гомологий пространства $(D_*^2 \times \mathbb{R}^N)/(Z/k)\,\partial$, изоморфной Z/k[2]). Получающийся вычет и принимается за значение $\Delta(f)$ на ∂.

Из этого описания можно извлечь аналитическое описание Z/k-вычета $[\Delta(f)](\nu)$ в терминах «эллиптического оператора, связанного с сигнатурой».

[1]) Все группы считаются локализованными в нечетных простых числах.

[2]) Символ $/(Z/k)\partial$ означает факторизацию края по действию группы Z/k. — *Прим. ред.*

Перейдем к изучению ядра гомоморфизма Δ_*. Ясно, что оно содержит все элементы вида

$$\{(V \to \mathrm{pt}) \times (M \to X),\ \text{сигнатура } V = 0\}.$$

Благодаря этому отображение Δ_* можно представить в виде композиции

$$\Omega_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/2] \to \Omega_*(X) \otimes_{\Omega_*} \mathbb{Z}[1/2] \xrightarrow{\tilde{\Delta}_*} K_*(X),$$

в которой $\tilde{\Delta}_*$ есть проекция на прямое слагаемое (Ω_* действует в $\mathbb{Z}[1/2]$ умножением на сигнатуру). В действительности $\tilde{\Delta}_*$ есть изоморфизм. Это доказывается опять-таки обращением к универсальному примеру. Мономорфность отображения $\tilde{\Delta}_*$ в случае, когда X есть многомерный остов пространства M, доказывается несложным «рациональным вычислением». Общий случай сводится к этому с помощью отображений

$$\mu\colon \{\text{кратная надстройка над } X\} \to \{\text{остов } M\},$$

поскольку для всякого $\alpha \in \Omega_*(X) \otimes_{\Omega_*} \mathbb{Z}[1/2]$ можно подобрать такое μ, чтобы $\mu(\alpha)$ было отлично от нуля. Итак,

$$\tilde{\Delta}_*\colon \Omega_*(X) \otimes_{\Omega_*} \mathbb{Z}[1/2] \to K_*(X)$$

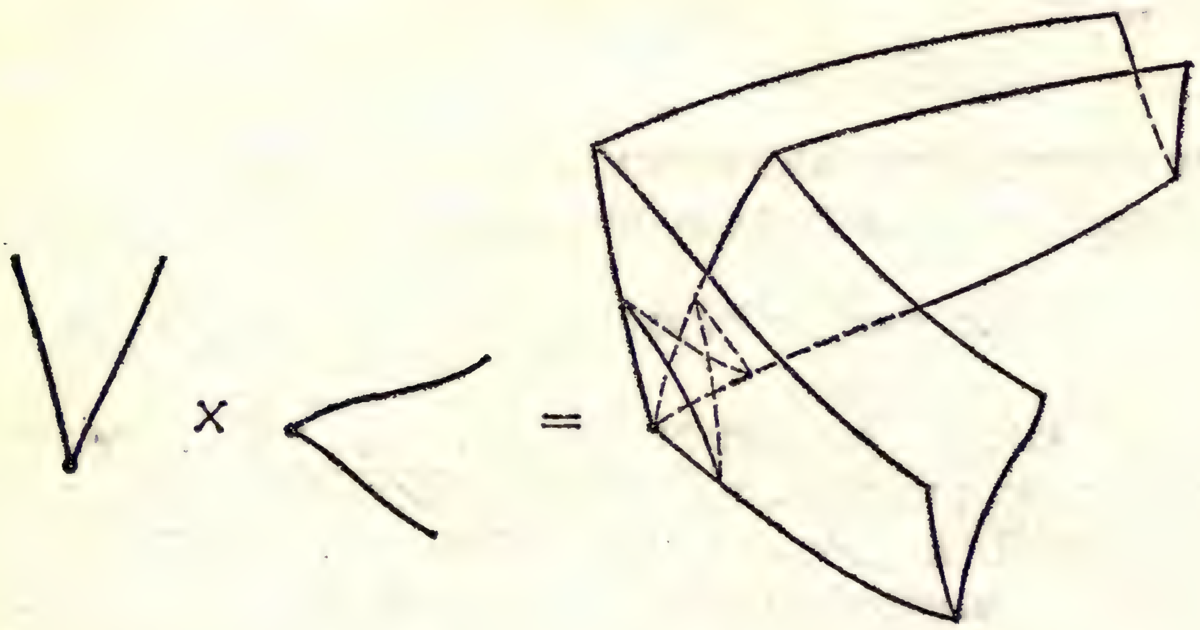
есть изоморфизм[1]).

Из описания гомологий $\mathrm{mod}\, n$ как обычных (целочисленных) гомологий джойна пространства X и пространства Мура выводится изоморфизм

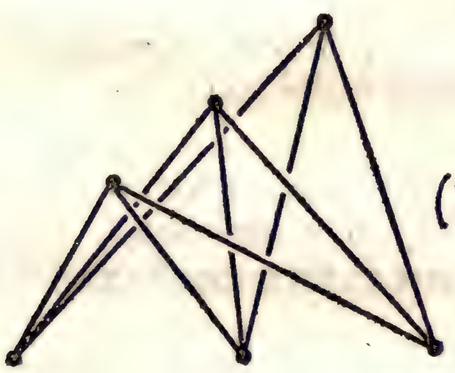
$$\Omega_*(X;\ \mathbb{Z}/n) \otimes_{\Omega_*} \mathbb{Z} \cong K_*(X;\ \mathbb{Z}/n).$$

[1]) Это рассуждение по существу принадлежит Коннеру и Флойду. См. дополнение П. Коннера, Э. Флойда «О соотношении теории кобордизмов и K-теории» к книге «Гладкие периодические отображения», «Мир», М., 1969, § 10.

Заметим теперь, что теория гомологий $\Omega_*(X; \mathbb{Z}/n)$ мультипликативна. Действительно, мы можем образовать произведение двух $\mathbb{Z}/n$-многообразий, например:



В результате мы получим пространство, которое является $(\mathbb{Z}/n)$-многообразием во всех точках, кроме произведений двух особых точек. Если в нашем примере (когда сомножители одномерны) рассмотреть границу окрестности такой точки, то она будет одномерным $\mathbb{Z}/n$-многообразием вида $(\mathbb{Z}/n) * (\mathbb{Z}/n)$[1]. Последнее $\mathbb{Z}/n$-многообразие может быть канонически представлено в виде границы двумерного $\mathbb{Z}/n$-многообразия. Это позволяет «исправить» произведение наших одномерных $\mathbb{Z}/n$-многообразий так, что оно само станет



$(\mathbb{Z}/3 * \mathbb{Z}/3)$

[1]) Здесь $\mathbb{Z}/n$ понимается как нульмерное многообразие, состоящее из n точек.

$\mathbb{Z}/n$-многообразием. Аналогично разбирается общий случай. Таким образом мы можем определить произведение двух $\mathbb{Z}/n$-многообразий. Это позволяет в свою очередь определить естественное коумножение в группах

$$K_*(X;\ \mathbb{Z}/n), \quad \Omega_*(X;\ \mathbb{Z}/n)\otimes_{\Omega_*}\mathbb{Z}/n;$$

в частности, они являются $\mathbb{Z}/n$-модулями[1]).

Далее, можно определить естественное отображение

$$K^*(X;\ \mathbb{Z}/n)\xrightarrow{e}\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}/n}(K_*(X;\ \mathbb{Z}/n),\ \mathbb{Z}/n).$$

Правая часть является значением на X некоторой теории когомологий, так как функтор «гомоморфизмы $\mathbb{Z}/n$-модулей в $\mathbb{Z}/n$» точен. Так как отображение e является изоморфизмом в случае $X=\mathrm{pt}$ (периодичность Ботта $\operatorname{mod} n$), то оно является изоморфизмом и для любого X[2]). Мы назовем отображение e «двойственностью Понтрягина в K-теории»[3]). Поэтому

$$K^*(X;\ \mathbb{Z}/n)\cong\operatorname{Hom}(K_*(X;\ \mathbb{Z}/n),\ \mathbb{Z}/n)\cong$$
$$\cong\operatorname{Hom}(K_*(X;\mathbb{Z}/n),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\cong\operatorname{Hom}(\Omega_*(X;\mathbb{Z}/n)\otimes_{\Omega_*}\mathbb{Z}/n,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

и, следовательно,

$$\varprojlim_{n\ \text{нечетно}} K(X;\mathbb{Z}/n)\cong\varprojlim_{n\ \text{нечетно}}\operatorname{Hom}(\Omega_*(X;\mathbb{Z}/n)\otimes_{\Omega_*}\mathbb{Z},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\cong$$
$$\cong\operatorname{Hom}\Big(\varinjlim_{n\ \text{нечетно}}(\Omega_*(X;\ \mathbb{Z}/n)\otimes_{\Omega_*}\mathbb{Z}),\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\Big)\subseteq$$
$$\subseteq\operatorname{Hom}\Big(\varinjlim_{n\ \text{нечетно}}\Omega_*(X;\ \mathbb{Z}/n),\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\Big)=$$
$$=\operatorname{Hom}(\Omega_*(X;\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z})_l,\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

---

[1]) Построение этих коумножений можно произвести по-другому, с помощью общей теории гомотопий. Приведенное здесь построение иллюстрирует геометрический характер наших рассуждений.

[2]) См. теорему 7.1 лекций А. Дольда «Полуточные гомотопические функторы», сб. *Математика* 14 : 1 (1970), стр. 41; для применимости этой теоремы необходимо, чтобы гомоморфизм e был изоморфизмом, когда X есть сфера, но случай сферы сводится к случаю точки применением изоморфизма надстройки, коммутирующего, очевидно, с e. — *Прим. ред.*

[3]) Ср. примечание на стр. 87.

Так как, далее, группа $K(X)$ конечно порождена, то ее пополнение совпадает с ее тензорным произведением на $\hat{\mathbb{Z}}$. Умножая коэффициентную $\mathbb{Z}/n$-последовательность тензорно на $\hat{\mathbb{Z}}$ и переходя к проективному пределу по нечетным n (группы компактны!), мы получаем изоморфизм

$$K^*(X)\hat{} \cong \varprojlim_{n \text{ нечетно}} K^*(X; \mathbb{Z}/n).$$

Следовательно, построенный изоморфизм отождествляет проконечную i-мерную K-теорию с проконечными i-мерными геометрическими коциклами. «Проконечная часть» теоремы доказана.

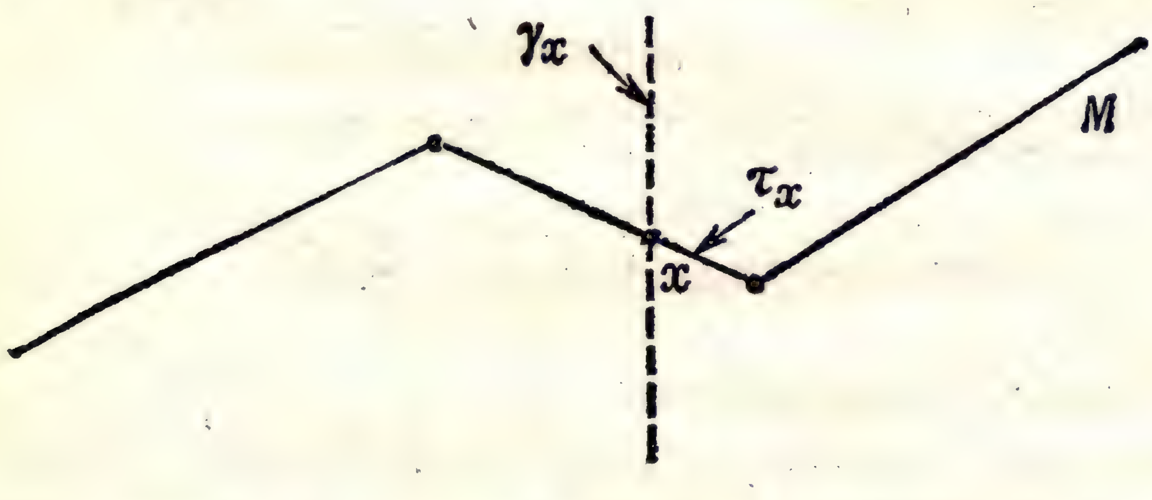
«Рациональная часть» теоремы доказывается рациональными когомологическими вычислениями. Достаточно заметить, что для каждого геометрического коцикла $\sigma_{\mathbb{Q}}$ существует единственный элемент Σ группы $K(X)\otimes\mathbb{Q}$, такой, что

$$\sigma_{\mathbb{Q}}(M \xrightarrow{f} X) = \langle L_M \cdot \mathrm{ph}\, f^*\Sigma,\ M\rangle.$$

(Здесь L_M есть L-род касательного расслоения M.)

Замечание. Атья нашел интересную постановку вопроса о непосредственной геометрической конструкции векторного расслоения Δ_E для PL-расслоения E.

Рассмотрим компактное симплициальное многообразие M в $\mathbb{R}^n$



с «нормальным PL-расслоением» E. Если x — неособая точка (т. е. внутренняя точка симплекса старшей размерности), то на нормальном пространстве M в точке x имеется естественная форма объема γ_x. Эту форму γ_x

можно рассматривать как элемент клиффордовой алгебры, соответствующей пространству $\mathbb{R}_x^N$, касательному к $\mathbb{R}^N$ в точке x. Форма γ_x удовлетворяет уравнению $\gamma_x^2 = 1$ и определяет расщепление пространства $\Lambda(\mathbb{R}_x^N)$,

$$\Lambda(\mathbb{R}_x^N) = (\Lambda\tau_x \otimes \Lambda^+ \nu_x) \oplus (\Lambda\tau_x \otimes \Lambda^- \nu_x),$$

где τ_x — касательное пространство к M в точке x, а подпространства Λ^+ и Λ^- внешней алгебры определены так же, как выше.

Формальная разность между этими векторными пространствами

$$(\Lambda\tau_x \otimes \Lambda^+ \nu_x) - (\Lambda\tau_x \otimes \Lambda^- \nu_x)$$

есть

$$\Lambda\tau_x \otimes (\Lambda^+ \nu_x - \Lambda^- \nu_x) \text{«}=\text{»} \frac{\Lambda^+ - \Lambda^-}{\Lambda^+ + \Lambda^-} \nu_x$$

и является локальной формой того элемента, который мы должны построить. Поэтому проблему построения векторного расслоения Δ_E можно «переформулировать» следующим образом:

продолжить функцию $x \mapsto \gamma_x$ *на все* M *так, чтобы*

(i) *для каждой точки* $y \in M$ *значение* γ_y *было единицей в алгебре Клиффорда пространства* $\mathbb{R}^N$;

(ii) γ_y *удовлетворяло соотношению* $\gamma_y^2 = 1$ (*или по крайней мере значения функции* γ_y^2 *лежали в стягиваемой окрестности нейтрального элемента в группе единиц алгебры Клиффорда*);

(iii) *значение* γ_y *строилось с помощью связи локальной геометрии пространства* M *в точке* y *с гомотопическими свойствами различных областей в алгебре Клиффорда пространства* $\mathbb{R}^N$.

Заметим, что этот случай (полиэдральное многообразие, нормальное расслоение в евклидовом пространстве) является общим для проблемы построения Δ_E: решение сформулированной задачи позволило бы решить проблему построения векторного расслоения Δ_E для любого PL-расслоения E.

§ 3. ПРОКОНЕЧНАЯ И РАЦИОНАЛЬНАЯ ТЕОРИИ *PL*-РАССЛОЕНИЙ

Мы продолжаем действовать в прежнем ключе: рассматриваем проконечный и рациональный аспекты той или иной проблемы и взаимоотношения между этими аспектами.

Такой подход применим к теории кусочно линейных расслоений, так как существует классифицирующее пространство

BPL_n = грассманиан «n-мерных PL-плоскостей в $\mathbb{R}^\infty$».

Поэтому мы можем определить проконечное пополнение множества n-мерных PL-расслоений на X как

$$[X, \text{ проконечное пополнение } BPL_n].$$

Если X есть локально конечный комплекс, то это множество имеет естественную структуру компактного хаусдорфова пространства. При этом в ориентированной теории множество «геометрических точек», соответствующих настоящим расслоениям, всюду плотно[1]). Отношение близости между этими «геометрическими точками» соответствует тонким теоретико-гомотопическим соотношениям между расслоениями.

Вспомним теперь, что имеется естественное отображение

$$(BSPL_n)\hat{} \to (BSG_n)\hat{}\ ^{2)}.$$

Таким образом, каждому проконечному PL-расслоению отвечает некоторый пополненный послойный сферический гомотопический тип. Поэтому мы можем считать, что пополненное PL-расслоение обладает сферическим гомотопическим типом, оснащенным еще некоторой «таинственной» геометрической структурой.

Из связности группы SPL_n следует односвязность соответствующего классифицирующего пространства и,

---

[1]) Для конечных подкомплексов это доказывается индукцией по клеткам.

[2]) Для стабильной теории это означает, что проконечное PL-расслоение имеет классический послойный гомотопический тип.

следовательно, наличие разложения

$$\left\{\begin{matrix}\text{ориентированная}\\ \text{проконечная}\\ PL_n\text{-теория}\end{matrix}\right\} \cong \prod_p \left\{\begin{matrix}\text{ориентированная}\\ p\text{-адическая}\\ PL_n\text{-теория}\end{matrix}\right\}.$$

Мы будем рассматривать дальше только p-адические компоненты с нечетными p — строение 2-адической компоненты еще совсем не ясно.

Далее мы будем обозначать через $\hat{X}$ то, что раньше обозначалось через $\hat{X}_{\{\text{нечетные простые числа}\}}$; 2-адические пополнения мы будем рассматривать очень редко и только в связи с линейной 2-адической гипотезой Адамса.

Можно определить также множество «рациональных PL-расслоений» над X, $[X, (BPL_n)_0]$[1]).

Напомним, что, как показывает арифметический квадрат, мы можем восстановить настоящее PL-расслоение по паре, состоящей из рационального PL-расслоения и проконечного PL-расслоения, удовлетворяющих условиям «рациональной согласованности». Так же как в случае сферических расслоений, в случае PL-расслоений эти условия согласованности можно выразить в терминах характеристических классов. Это вытекает из следующего предложения:

Теорема 6.5 ($\mathbb{Q}$). *Рациональные характеристические классы*

$$L_1, L_2, \ldots \qquad [L_i \in H^{4i}(B; \mathbb{Q})]$$

и «гомотопические классы»

класс Эйлера $\chi \in H^n(B; \mathbb{Q})$, *если* n *четно*,

класс Хопфа $\mathscr{H} \in H^{2n-2}(B; \mathbb{Q})$, *если* n *нечетно*,

---

[1]) Локализацию следует начинать с ориентированного случая. Далее, наличие расслоения

$$BSPL_{2n} \to BPL_{2n} \to K(Z/2, 1)$$

позволяет локализовать пространство BPL_n (при этом надо, как в гл. 4, применять послойную локализацию). Наконец, локализации пространств BPL_{2n+1} и $BSPL_{2n+1}$ совпадают, так как в этом случае группа $\pi_1 = Z/2$ тривиально действует на рациональном гомотопическом типе пространства $BSPL_{2n+1}$.

образуют полную систему рациональных инвариантов n-мерного ориентируемого PL-расслоения над B.

Более того, ориентированная рациональная PL_n-теория изоморфна произведению соответствующих когомологических теорий:

$$H^n(\ ;\mathbb{Q})\times\prod H^{4*}(\ ;\mathbb{Q}) \text{ при четном } n,$$
$$H^{2n-2}(\ ;\mathbb{Q})\times\prod H^{4*}(\ ;\mathbb{Q}) \text{ при нечетном } n.$$

Замечания. Нетрудно проверить, что неориентированная рациональная теория *четномерных* PL-расслоений получается из ориентированной подкручиванием эйлерова класса с помощью гомоморфизма

$$\pi_1(B)\to\mathbb{Z}/2=\{\pm 1\}\subseteq\mathbb{Q}^*.$$

В нечетных размерностях никакого подкручивания не требуется, так как -1 действует на хопфовском классе тривиально.

Заметим также, что соотношение

$$\chi^2=\text{«}n\text{-й класс Понтрягина»},$$

т. е.

$$\chi^2=3L_1 \qquad (n=1),$$
$$\chi^2=\frac{45L_2+9L_1^2}{7} \qquad (n=2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

не имеет места для блочных расслоений (в отличие от обычных векторных). Представляется правдоподобным предположение, что это соотношение должно иметь место для промежуточной теории — теории PL-микрорасслоений, в которой требуется существование геометрической проекции.

Информация, доставляемая рациональными классами L, совпадает с информацией, доставляемой сигнатурами пересечений замкнутых многообразий с нулевым сечением.

Эйлеров класс описывает самопересечение B в E.

Инварианты проконечной PL-теории. Рассмотрим два инварианта PL-расслоения E над B:

(i) ориентацию в K-теории,

$$\Delta_E\in\widehat{K}_c(E);$$

(ii) пополненный послойный гомотопический тип послойного пополнения расслоения

$$E - B \to B.$$

Первоначально они были определены только для «геометрических PL-расслоений». Мы уже видели, однако, что второй инвариант имеет смысл и для проконечных PL-расслоений. Чтобы показать, что и первый инвариант имеет смысл для проконечных PL-расслоений, достаточно разобрать универсальный пример — расслоение E_n над $BSPL_n$. А в этом случае легко проверить, что группа $\hat{K}_c = E_n$ изоморфна пополненному K-функтору сферического расслоения над $(BSPL_n)\hat{}$.

Теорема 6.5 ($\hat{\mathbb{Z}}$). *Два инварианта n-мерного проконечного PL-расслоения, послойный гомотопический тип и $\hat{K}$-ориентация, составляют полную систему инвариантов при $n > 2$* [1]). *Более того, при $n > 2$ имеет место изоморфизм*

$$\left\{\begin{matrix}\text{проконечные}\\ PL_n\text{-расслоения}\end{matrix}\right\} \cong \left\{\begin{matrix}K\text{-ориентированные}\\ \hat{S}^{n-1}\text{-расслоения}\end{matrix}\right\}.$$

Таким образом, различным способам введения (проконечной) геометрической структуры на гомотопическом типе расслоения $E - B \to B$ соответствуют различные $\hat{K}$-ориентации.

Напомним, что задание ориентации определяет изоморфизм Тома

$$\hat{K}(B) \overset{\Delta}{\cong} \hat{K}(E).$$

Так как отображение $E \longmapsto \Delta_E$ строилось при помощи сигнатуры $\sigma(E)$, то изоморфизм Тома в K-теории согласован с рассматривавшимся выше геометрическим изоморфизмом Тома. Мы приходим к приятному с эстетической точки зрения заключению, что (вне простого числа 2) вся геометрическая [2]) информация, содержа-

[1]) Если $n = 1$, то ориентированная теория тривиальна. Если $n = 2$, эйлеров класс в когомологиях является единственным инвариантом.

[2]) Не теоретико-гомотопическая.

щаяся в PL-расслоении, содержится уже в $\mathbb{Z}/n$-сигнатурах $\mathbb{Z}/n$-пересечений с нулевым сечением (для нечетных n).

Кроме того, мы видим, что произвольный набор сигнатур «виртуальных пересечений» (с подходящим геометрическим нулевым сечением) в сферическом расслоении, удовлетворяющий условиям периодичности и инвариантности относительно кобордизма, может быть реализован проконечным PL-расслоением. Другими словами, препятствие к реализации полного сферического расслоения как «дополнения к нулевому сечению» в PL-расслоении совпадает с препятствием к $\hat{K}$-ориентируемости.

Замечание. Препятствие к $\hat{K}$-ориентируемости полного сферического расслоения ξ над B измеряется каноническим характеристическим классом

$$k_1(\zeta) \in \hat{K}^1(B).$$

Доказательство теоремы 6.5 ($\hat{\mathbb{Z}}$) мы приведем ниже, в разделе «Последовательность, связанная с K-ориентацией».

Симметрии Галуа в проконечной PL-теории. Теперь мы используем построенную связь K-теории с PL-теорией, чтобы ввести в последней действие группы Галуа.

В гл. 5 мы построили действие абелеанизированной группы Галуа $\hat{\mathbb{Z}}^*$ на кольце $\hat{K}(X)$:

$$x \longmapsto x^{\alpha}, \qquad \alpha \in \hat{\mathbb{Z}}^*.$$

Это действие можно продолжить на $\hat{K}^*(X) = \bigoplus \hat{K}^n(X)$ с помощью изоморфизма надстройки. При этом если $x \in \hat{K}^{4k}(X)$ и b: $\hat{K}^{4k}(X) \to \hat{K}^0(X)$ — изоморфизм периодичности, то

$$x^{\alpha} = \alpha^{-2k} b^{-1}\left(b(x)^{\alpha}\right).$$

Теперь мы можем определить действие группы $\hat{\mathbb{Z}}^* \times \hat{\mathbb{Z}}^*$ в проконечной PL_n-теории, задав действие на определяющих инвариантах формулой

$$(\Delta_E,\ (E - B) \to B) \xmapsto{(\alpha,\ \beta)} (\beta\Delta_E^{\alpha},\ (E - B) \to B),$$
$$\alpha, \beta \in \hat{\mathbb{Z}}^*, \quad \Delta_E \in \hat{K}^n(E^+),$$

где E^+ — пространство Тома сферического расслоения. Следующая теорема дает возможность сопоставить это действие с действием группы $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ в проконечной теории векторных расслоений. Напомним сначала, что группа $\hat{\mathbb{Z}}^*$ действует на множестве ориентированных $\hat{S}^{n-1}$-расслоений по формуле

$$(\xi, U_\xi) \longmapsto (\xi, \alpha U_\xi), \quad \alpha \in \hat{\mathbb{Z}}^*.$$

Теорема 6.6 (обобщенная гипотеза Адамса). *Рассмотрим естественное отображение между проконечными теориями с действием соответствующих групп:*

$$\underset{\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}{\left\{\begin{matrix}\text{векторные}\\ n\text{-мерные}\\ \text{пространства}\end{matrix}\right\}} \xrightarrow{t} \underset{\hat{\mathbb{Z}}^* \times \hat{\mathbb{Z}}^*}{\left\{\begin{matrix}\text{проконечные}\\ PL_n\text{-расслоения}\end{matrix}\right\}} \xrightarrow{h}$$

$$\xrightarrow{h} \underset{\hat{\mathbb{Z}}^*}{\left\{\begin{matrix}\text{полные}\\ \hat{S}^{n-1}\text{-расслоения}\end{matrix}\right\}}.$$

Пусть σ — элемент группы $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ и $\alpha \in \hat{\mathbb{Z}}^*$ — его абелеанизация. Пусть, далее, V — векторное n-мерное расслоение, E — некоторое PL_n-расслоение. Тогда

$$t(V^\sigma) = \begin{cases} \alpha^{n/2} \cdot t(V)^\alpha, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \alpha^{(n-1)/2} \cdot t(V)^\alpha, & \text{если } n \text{ нечетно;} \end{cases}$$

$$h(\beta E^\alpha) = \beta h(E).$$

Следствие 1. *Действие группы $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ на «топологическом типе» векторного расслоения является абелевым.*

Следствие 2. *Диагональное действие в PL_n-теории*

$$E \longmapsto \begin{cases} \alpha^{n/2} E^\alpha, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \alpha^{(n-1)/2} E^\alpha, & \text{если } n \text{ нечетно,} \end{cases}$$

является «алгебраическим». Оно согласовано с действием группы Галуа на векторных расслоениях.

Замечания. (i) В 1966 г. автор, используя сигнатурный инвариант и 2-примарный инвариант Арфа доказал топологическую инвариантность геометрических структур (триангуляций) в расслоениях при условии, что в многообразии «нет трехмерных циклов порядка 2» [1]). Так как сейчас мы ограничиваемся нечетными простыми числами, то из «гомеоморфности следует PL-гомеоморфность». Поэтому мы и употребили при формулировке следствия 1 слова «топологический тип».

Эти же инварианты позволили также доказать «Hauptvermutung» для односвязных многообразий. В 1968—1969 гг. Кирби и Зибенман смогли, используя более прямые методы, исключить, по существу, условие односвязности и доказать *существование* триангуляции [2]).

(ii) Мы переформулируем сейчас утверждения следствия 2. Симметрии в теориях расслоений индуцируют действия соответствующих групп на классифицирующих пространствах. В частности, действие группы $\hat{\mathbb{Z}}^*$ на множестве PL-расслоений

$$V \longmapsto \alpha^{n/2} V^{\alpha}, \quad \alpha \in \hat{\mathbb{Z}}^*, \ n \text{ четно},$$

индуцирует действие этой группы на PL-грассманиане.

Утверждение следствия 2 заключается в том, что это действие сохраняет образ линейного грассманиана и согласовано с действием группы $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ на линейном грассманиане.

Если мы устремим n к ∞, то симметрии в проконечных теориях упростятся. Именно: (a) действие группы $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ на стабильных векторных расслоениях делается абелевым и соответствует действию группы $\hat{\mathbb{Z}}^*$ в $K(X)^{\wedge}$; (b) действие группы $\hat{\mathbb{Z}}^* \times \hat{\mathbb{Z}}^*$ на PL_n-расслоениях переходит в действие группы $\hat{\mathbb{Z}}^*$:

$$(\Delta_E, (E - B) \to B)^{(\alpha, \beta)} = \\ = (\alpha \Delta_E^{\beta}, (E - B) \to B) \cong (\Delta_E^{\beta}, (E - B) \to B);$$

---

[1]) См. Sullivan D., On the Hauptvermutung for manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**, № 4 (1967), 598—600. — *Прим. ред.*

[2]) На примере многообразия $S^3 \times S^1 \times S^1$ можно проследить взаимосвязи.

(c) действие группы $\hat{\mathbb{Z}}^*$ на $\hat{S}^{n-1}$-расслоениях становится тривиальным.

Другими словами, имеет место следующее предложение.

Теорема 6.7. *Имеется эквивариантная последовательность теорий*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \left\{\begin{matrix}\text{стабильные}\\ \text{векторные}\\ \text{расслоения}\end{matrix}\right\} \arrow[r] & \left\{\begin{matrix}\text{стабильные}\\ PL\text{-расслоения}\end{matrix}\right\} \arrow[r] & \left\{\begin{matrix}\text{стабильные}\\ \text{сферические}\\ \text{расслоения}\end{matrix}\right\} \\ & \{\text{действия группы } \hat{\mathbb{Z}}^*\} \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[u, "\beta"'] \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

где

α *индуцируется действием группы* $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *на «вещественном грассманиане» и делается абелевым при стабилизации;*

β *индуцируется действием группы* $\hat{\mathbb{Z}}^*$ *на сигнатурном инварианте* $\sigma(E)$ *(после отождествления с* Δ_E*);*

γ *индуцируется заменой ориентации и тривиализуется при стабилизации.*

Следствие. *Все естественные симметрии в стабильной PL-теории являются алгебраическими симметриями (симметриями Галуа).*

Проблема. *Найти действие группы Галуа на сигнатурном инварианте:*

$$\sigma(E^{\alpha}) = ? \quad (\sigma(E)?).$$

Замечание. Эти теоремы дают довольно явное описание действия группы Галуа на топологическом типе векторного расслоения в нечетных простых числах. Это может быть полезно при изучении алгебраических векторных расслоений над полем характеристики 2.

Доказательства содержатся в последнем параграфе этой книги.

§ 4. НОРМАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ (ПЕРИОДИЧНОСТЬ И СИММЕТРИИ ГАЛУА)

Теперь мы рассмотрим теорию послойной гомотопической эквивалентности расслоений.

Эта теория тесно связана с теми геометрическими вопросами теории многообразий, которые привели автора к написанию настоящей работы. Кроме того, два важных момента в последующих вычислениях получат здесь наиболее естественное выражение.

Геометрически *нормальный инвариант* компактного многообразия M (с краем или без него) определяется как класс бордизмов нормального отображения, т. е. отображения

$$L \xrightarrow{f} M$$

степени 1, накрытого отображением

$$\left\{\begin{matrix}\text{нормальное расслоение к } L\\ \text{в евклидовом пространстве}\end{matrix}\right\} \xrightarrow{bf}$$

$$\xrightarrow{bf} \left\{\begin{matrix}\text{некоторое векторное}\\ \text{расслоение над } M\end{matrix}\right\}.$$

Мы можем говорить о гладких PL- или топологических нормальных инвариантах sH, PLN или tN. Нормальные инварианты образуют группу (надо сделать отображение $f \times f'$ трансверсальным к диагонали в $M \times M$ и рассмотреть прообраз диагонали) и определяют естественные геометрические инварианты. Например, каждому $\mathbb{Z}/n$-подмногообразию V многообразия M можно отнести любой «инвариант класса кобордизмов» квадратичной формы на трансверсальном прообразе $f^{-1}(V)$.

С теоретико-гомотопической точки зрения нормальные инварианты соответствуют послойным гомотопическим эквивалентностям между расслоениями над M,

$$E \xrightarrow{f} F.$$

Такие отображения, f и f', считаются эквивалентными, если существует послойно-гомотопически коммутатив-

ная диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\cong"'] & F \arrow[d, "\cong"] \\ E' \arrow[r, "f'"] & F' \end{tikzcd}$$

в которой вертикальные стрелки являются изоморфизмами между расслоениями. Эти гомотопические нормальные инварианты можно складывать по Уитни, и соответствующие группы Гротендика классифицируются с помощью отображений в универсальные пространства:

$$sN \cong [\quad, G/O], \quad plN \cong [\quad, G/PL], \quad tN \cong [\quad, G/\mathrm{Top}]$$ [1])

в зависимости от того, какая категория расслоений рассматривается.

Геометрическое описание нормальных инвариантов позволяет различать многообразия (гладкие, PL- или топологические) внутри фиксированного односвязного гомотопического типа. Для этого надо использовать технику «перестроек» отображений, развитую Браудером и Новиковым[2]).

Гомотопическое же описание позволяет изучить эти инварианты.

Прежде всего между геометрической и гомотопической теориями существует взаимосвязь. Оказывается, что рассмотренные выше геометрические инварианты (сигнатура вещественных квадратичных форм и инвариант Арфа $\mathbb{Z}/2$-форм) составляют полную систему числовых инвариантов нормального класса кобордизмов как в PL-, так и в топологической ситуации. (Это доказывается в PL-случае в работе автора Geometric

[1]) Через G обозначен предел H-пространств гомотопических эквивалентностей сферы S^n при $n \to \infty$. — *Прим. ред.*

[2]) См. диссертацию автора[3]). Уолл распространил эту теорию и на неодносвязные многообразия[4]), причем в игру вступили другие, «вторичные» инварианты, связанные с фундаментальной группой.

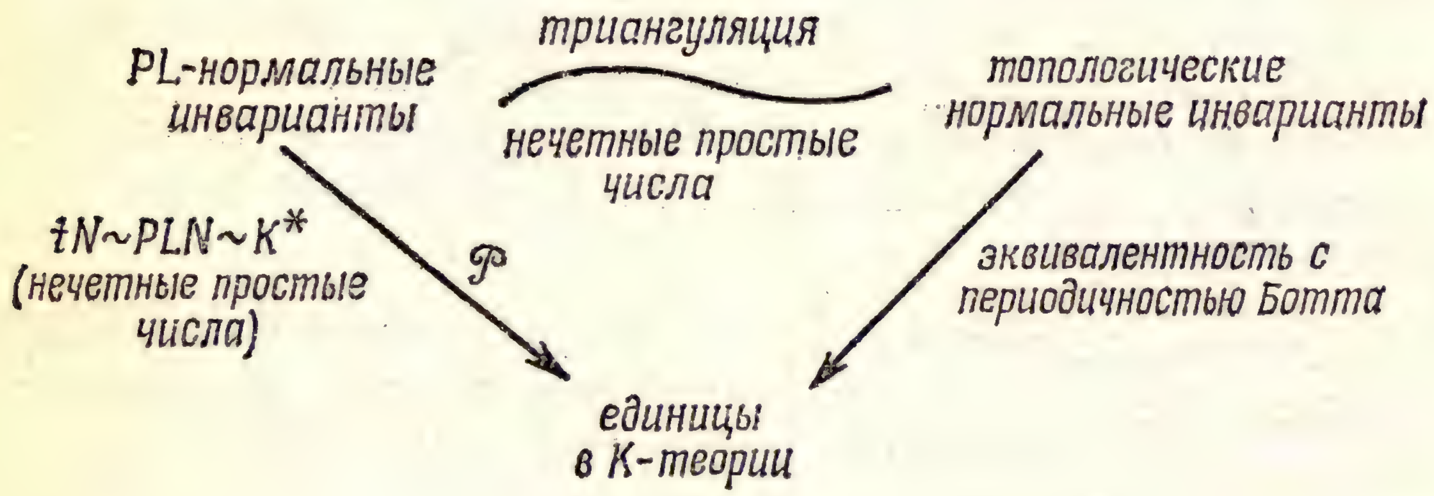
[3]) См. также Новиков С. П., Гомотопически эквивалентные гладкие многообразия, *ИАН СССР*, сер. матем., **28**, № 2 (1964), 365—474. — *Прим. ред.*

[4]) См. Wall C. T. C., Surgery on non-simply-connected manifolds, *Ann. of Math.*, **84**, № 2 (1966), 217—276. — *Прим. ред.*

Topology, Seminar Notes, Princeton, 1967; топологический случай требует использования уже упоминавшихся работ Кирби и Зибенмана, построивших триангуляцию топологических многообразий.)

Связь между этими инвариантами описывается с помощью кобордизмов и формулы периодичности. Это геометрическая периодичность, которая является точной 4-периодичностью даже по отношению к двойке.

Мы будем использовать ее только по нечетным простым числам, где она может быть интерпретирована с помощью естественных эквивалентностей с K-теорией:



Этот изоморфизм позволяет определить действие абелеанизированной группы Галуа $\hat{\mathbb{Z}}^*$ в множестве нормальных топологических инвариантов.

Отображение $\mathcal{P}$ строится с помощью сигнатурных инвариантов и приведенной выше геометрической характеризации K-теории. Далее K-ориентация PL-расслоения определяется как обобщение этого «нечетного» вычисления нормального PL-инварианта.

Изоморфизм $\mathcal{P}$ является первой составной частью вычислений, которые мы скоро будем проводить. Ниже мы опишем его более подробно. Другая составная часть была построена в гл. 5.

Используя гомотопическое описание нормального инварианта, мы можем образовать его проконечное пополнение. Предпринятое выше обсуждение гипотезы Адамса показывает, что для каждого проконечного векторного расслоения v над M и для любого $\alpha \in \hat{\mathbb{Z}}^*$ определен

канонический элемент

$$(v^{\alpha} \sim v)$$

группы проконечных гладких нормальных инвариантов над M[1]). (Напомним, что послойная гомотопическая эквивалентность

$$v^{\alpha} \to v$$

канонически строится по изоморфизму, индуцированному элементом α в BO_{n-1}, $n = \dim v$.)

Для наших вычислений требуется только существование этих естественных «элементов Галуа». Явное описание этих элементов должно бы потребоваться для будущих «подкрученных вычислений».

Мы надеемся заняться этими структурами и «квазидействием» группы Галуа при дальнейшем изучении многообразий.

Некоторые применения периодичности и симметрии Галуа. Теперь мы применим полученные результаты к изучению стабильных геометрических теорий.

Напомним, что мы построили сигнатурный инвариант PL-расслоений, с помощью которого были сформулированы теорема о K-ориентации[2]) и свойство 4-периодичности нечетной части нормального инварианта. Кроме того, мы определили действие группы Галуа на пополненном гомотопическом типе алгебраических многообразий, в частности на пополнении грассманиана k-мерных плоскостей в n-мерном пространстве, и это действие позволило нам определить действие абелеанизированной группы Галуа $\hat{Z}^*$ на множестве векторных расслоений.

Мы используем сейчас эти конструкции для определения согласованного действия группы Галуа на линейной и кусочно линейной теориях и построения канонической послойной гомотопической эквивалентности между сопряженными расслоениями, $x^{\alpha} \cong x$.

---

[1]) Заметим, что любой (конечный) гомотопический тип может быть представлен компактным многообразием с краем.

[2]) Доказательство этой теоремы см. ниже, в § 6.

Рассмотрим диаграмму стабильных проконечных теорий

$$\begin{tikzcd}
\left\{\begin{matrix}\text{гладкие}\\ \text{расслоения}\end{matrix}\right\} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \left\{\begin{matrix}\text{сферические}\\ \text{расслоения}\end{matrix}\right\} \\
& \left\{\begin{matrix}\text{топологические}\\ \text{расслоения}\end{matrix}\right\} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

С помощью гомотопических эквивалентностей (линеаризаций)

$$\left\{\begin{matrix}\text{группа диффеоморфизмов}\\ \text{пространства } \mathbb{R}^n\end{matrix}\right\} \cong$$

$$\cong \left\{\begin{matrix}\text{группа линейных}\\ \text{автоморфизмов}\\ \text{пространства } \mathbb{R}^n\end{matrix}\right\} \qquad \text{(Ньютон)}$$

и

$$\left\{\begin{matrix}\text{группа гомеоморфизмов}\\ \text{пространства } \mathbb{R}^n\end{matrix}\right\} \cong$$

$$\cong \left\{\begin{matrix}\text{группа кусочно}\\ \text{линейных автоморфизмов}\\ \text{пространства } \mathbb{R}^n\end{matrix}\right\} \qquad \text{(Кирби — Зибенман)}^{1)}$$

мы можем отождествить нашу диаграмму с диаграммой, более приспособленной для вычислений [2]):

$$\begin{tikzcd}
\left\{\begin{matrix}\text{векторные}\\ \text{расслоения}\end{matrix}\right\} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \left\{\begin{matrix}\text{сферические}\\ \text{расслоения}\end{matrix}\right\} \\
& \left\{\begin{matrix}\text{кусочно линейные}\\ \text{расслоения}\end{matrix}\right\} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

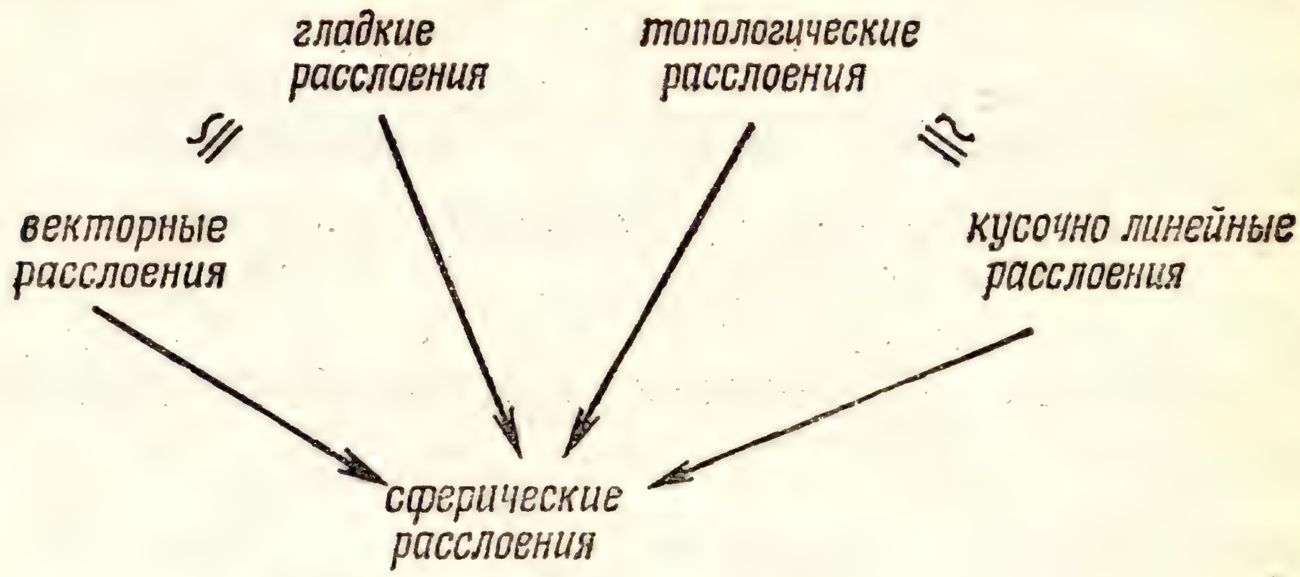
Теорема 6.8. *Ядра естественных отображений между стабильными проконечными теориями расслое-*

---

[1]) Мы рассматриваем только «нечетную часть» гомотопического типа и считаем, что $n \to \infty$.

[2]) Можно использовать теорию Ли или комбинаторную геометрию для построения инвариантов расслоений.

ний (J-гомоморфизмов)



являются в каждом случае подгруппами, порожденными разностями сопряженных элементов $\{x - x^{\alpha},\ \alpha \in \hat{\mathbb{Z}}^{*}\}$ [1]).

Замечания. В гл. 5 мы построили для любого векторного расслоения x каноническую послойную гомотопическую тривиализацию расслоения $x^{\alpha} - x$.

Адамс, который высказал утверждение о существовании такой тривиализации в качестве гипотезы [2]), по существу доказал теорему 6.8 для векторных расслоений с помощью очень интересных вычислений в K-теории.

Из нашего определения действия группы Галуа в PL'- (или Top-) теории сразу следует, что сопряженные расслоения послойно гомотопически эквивалентны. Поэтому в доказательстве нуждается только противоположное утверждение.

Главным оказывается факт согласованности действия группы Галуа в различных теориях. С его помощью удается свести PL-случай к линейному случаю и к несколько модифицированным вычислениям Адамса.

Для осуществления этой редукции и вообще для изучения связей между различными стабильными тео-

---

[1]) Напомним, что в кусочно линейном и топологическом случаях мы рассматриваем только «нечетную часть».

[2]) Вместо действия группы Галуа он пользовался операциями ψ.

риями мы разложили каждую из теорий в прямую сумму более простых, используя наличие в $\hat{\mathbb{Z}}$ корней из единицы.

Выберем нечетное простое число p и рассмотрим p-адическую компоненту. Как было показано в гл. 1, в группе $\hat{\mathbb{Z}}_p^*$ содержится циклическая подгруппа

$$F_p^* \cong \mathbb{Z}/(p-1).$$

Зафиксируем примитивный корень $(p-1)$-й степени из единицы $\xi_p = \xi \in \hat{\mathbb{Z}}_p$ и рассмотрим какой-нибудь $\hat{\mathbb{Z}}_p$-модуль K.

Обозначим через T автоморфизм модуля K, действующий по формуле $x \longmapsto x^\xi$, и положим

$$\pi_{\xi^i} = \prod_{j \neq i} \frac{T - \xi^j}{\xi^i - \xi^j} \qquad (i = 0, \ldots, p-2).$$

Операторы π_{ξ^i} образуют систему ортогональных проекций модуля K, разлагающую его в прямую сумму

$$K = K_1 + (K_{\xi^1} + \ldots + K_{\xi^{p-2}}).$$

Здесь K_{ξ^i} есть собственное пространство автоморфизма T, отвечающее собственному значению ξ^i, т. е. $K_{\xi^i} = \pi_{\xi^i} K$. Положим $K_{\xi_p} = \bigoplus_{i=1}^{p-2} K_{\xi^i}$. Имеет место расщепление

$$K = K_1 + K_{\xi_p},$$

не зависящее от выбора первообразного корня ξ_p.

Пусть теперь K есть $\hat{\mathbb{Z}}$-модуль, на котором действие группы $\hat{\mathbb{Z}}^*$ есть произведение действий групп $\hat{\mathbb{Z}}_p^*$ на подмодулях K_p по нечетным простым числам p. Используя разложения модулей K_p, мы получаем разложение всего модуля K:

$$K = K_1 + K_\xi,$$

где $K_1 = \prod_p (K_p)_1$ и $K_\xi = \prod_p (K_p)_{\xi_p}$.

Таким образом, мы построили естественные расщепления теорий проконечных векторных расслоений, проконечных топологических расслоений и проконечного топологического нормального инварианта:

$$K_0 \cong (K_0)_1 + (K_0)_\xi,$$
$$K_{\text{top}} \cong (K_{\text{top}})_1 + (K_{\text{top}})_\xi,$$
$$tN \cong (tN)_1 + (tN)_\xi \text{ [1]}.$$

Для того чтобы описать «связи между этими группами», мы рассмотрим в K_{top} подгруппу, составленную из расслоений, «эквивариантных относительно действия группы Галуа». Обозначим через $\mathscr{C}^1$ подгруппу группы K_{top}, порожденную такими расслоениями E, что изоморфизм Тома

$$K\,(\text{база}) \xrightarrow[\cong]{\cup \Delta_E} K\,(\text{пространство Тома})$$

является эквивариантным отображением (относительчо действия группы Галуа). Заметим, что это эквивалентно равенству

$$(x \cdot \Delta_E)^\alpha = x^\alpha \cdot \Delta_E,$$

или $\Delta_E^\alpha = \Delta_E$. Таким образом, в данном случае тождественное отображение индуцирует изоморфизм между E и E^α, т. е.

$$\mathscr{C}^1 \subseteq \left\{ \begin{matrix} \text{множество неподвижных точек относительно} \\ \text{действия группы Галуа на } K_{\text{top}} \end{matrix} \right\}.$$

В частности, $\mathscr{C}^1$ содержится в $(K_{\text{top}})_1$ — в подгруппе, состоящей из классов расслоений, инвариантных относительно элементов конечного порядка группы Галуа.

---

[1]) Мы все время рассматриваем приведенные пополненные группы. Так, например, мы обозначаем группу специальных единиц в K-теории через K^* $(= 1 + \widetilde{K})$. Мы пишем K_0 (а не K), подчеркивая тот факт, что мы рассматриваем стабильные проконечные векторные расслоения. Буквой K мы обозначаем приведенную теорию когомологий $[\ \ , B_0]$.

Рассмотрим теперь диаграмму теорий, имеющую более непосредственный геометрический смысл:

$$\begin{tikzcd}
 & \left\{\begin{matrix}\text{векторные}\\ \text{расслоения}\end{matrix}\right\} \arrow[dr, "\theta"] & \\
 & & \left\{\begin{matrix}\text{топологи-}\\ \text{ческие}\\ \text{расслое-}\\ \text{ния}\end{matrix}\right\} \\
\left\{\begin{matrix}\text{теория послойных}\\ \text{гомотопических}\\ \text{эквивалентностей}\end{matrix}\right\} \arrow[r, phantom, "\cong"] & \left\{\begin{matrix}\text{топологические}\\ \text{нормальные}\\ \text{инварианты}\end{matrix}\right\} \arrow[ur, "J"] &
\end{tikzcd}$$

$$\theta\begin{pmatrix}\text{векторное}\\ \text{расслоение}\end{pmatrix}=\left\{\begin{matrix}\text{соответствующее}\\ \mathbb{R}^n\text{-расслоение}\end{matrix}\right\};$$

$$J\begin{pmatrix}\text{послойная гомотопическая}\\ \text{эквивалентность } E\sim F\end{pmatrix}=E-F.$$

По определению, образ отображения θ состоит из сглаживаемых расслоений, а образ отображения J — из послойно гомотопически тривиальных расслоений.

Напомним, что абелеанизированная группа Галуа $\hat{\mathbb{Z}}^*$ действует в теориях этой диаграммы согласованным образом.

Теорема 6.9 (теорема о разложении).

(a) *Отображение* θ *является мономорфизмом на* 1-*компоненту и*

$$(K_{\mathrm{top}})_1=\theta(K_0)_1\oplus\mathscr{C}^1.$$

(b) *Отображение* J *является вложением на* ξ-*компоненту и*

$$(K_{\mathrm{top}})_\xi=J(tN)_\xi.$$

(c) $(\mathrm{Im}\,\theta)_\xi\subseteq(\mathrm{Im}\,J)_\xi$, *т. е. «векторное расслоение типа* ξ*» определяет послойно гомотопически тривиальное расслоение.*

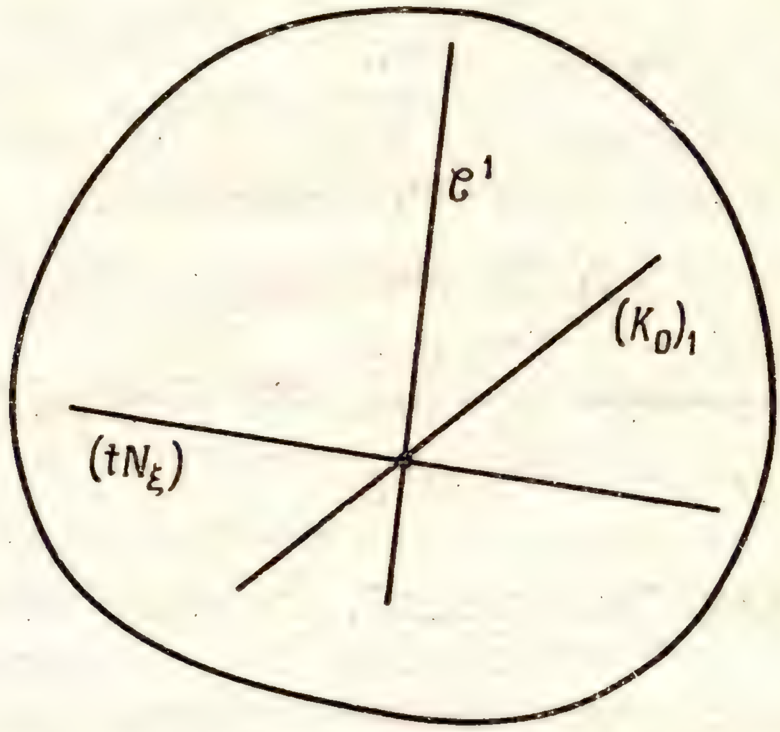
(d) $(\mathrm{Im}\,J)_1\subseteq(\mathrm{Im}\,\theta)_1$, *т. е. послойно гомотопически тривиальное «расслоение типа* 1*» сглаживаемо.*

Другими словами, подгруппы

$$\mathscr{C}^1=\{\text{эквивариантные расслоения}\},$$

$$\mathrm{Im}\,J+\mathrm{Im}\,\theta=\left\{\begin{matrix}\text{суммы сглаживаемых и гомотопически}\\ \text{тривиальных расслоений}\end{matrix}\right\}$$

являются дополнительными. Кроме того, вторая подгруппа канонически разлагается в прямую сумму подгруппы, состоящей из сглаживаемых расслоений, и подгруппы, состоящей из гомотопически тривиальных расслоений:

$K_{top} \cong$ 

Замечание. Так как функторы $K_{top}(tN)_\xi$ и $(K_0)_1$ представимы, то и функтор $\mathscr{C}^1$ представим. При этом гомотопические группы пространства, представляющего $\mathscr{C}^1$ (мы далее будем обозначать его тоже через $\mathscr{C}^1$), имеют конечный порядок и являются подгруппами группы $K_{top}(S^i)$. Оказывается, что их можно описать равенством

$$\mathscr{C}^1(S^i) = \left\{\begin{matrix}(i-1)\text{-я стабильная}\\ \text{гомотопическая}\\ \text{группа сферы}\end{matrix}\right\} \Big/ \left\{\begin{matrix}\text{образ}\\ \text{гомоморфизма } J\end{matrix}\right\} \cong$$

$$\cong \left\{\begin{matrix}\text{группа экзотических}\\ (i-1)\text{-мерных сфер}\end{matrix}\right\} \Big/ \left\{\begin{matrix}\text{экзотические сферы, ог-}\\ \text{раничивающие паралле-}\\ \text{лизуемые многообразия}\end{matrix}\right\} [1]$$

В частности, пространство $(\mathscr{C}^1)_p$ является $(2p(p-1)-2)$-связным.

Эти утверждения сразу следуют из точности K-ориентационной последовательности, которая будет построена дальше. Аналогичные вычисления были проведены

[1]) Доказательство последнего изоморфизма см. в следующей работе: Kervaire M. A., Milnor J. W., Groups of homotopy spheres, I, *Ann. Math.*, **77**, № 3, (1963), 504—537. — *Прим. ред.*

Брумфилем, и его результаты послужили в действительности отправной точкой для построения расщеплений.

Следствие 1. *Функтор $\mathscr{C}^1$ вкладывается в гомотопическую теорию и в «топологическую теорию по модулю гладкой теории».*

Это означает, что различные эквивариантные расслоения гомотопически различны.

Следствие 2. *Различные стабильные векторные расслоения, инвариантные относительно элементов конечного порядка группы $\hat{\mathbb{Z}}^*$, топологически различны.*

Эти следствия формально выводятся из теоремы 6.9.

§ 5. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ КЛАСС ТОПОЛОГИЧЕСКОГО РАССЛОЕНИЯ В K-ТЕОРИИ

Чтобы доказать теорему о разложении, нам надо научиться «измерять расстояние» от топологического расслоения до подгруппы, состоящей из расслоений, у которых изоморфизм Тома эквивариантен. Это делается с помощью характеристического класса в K (база E), определенного для произвольного топологического расслоения E [1]).

Рассмотрим функцию

$$\hat{\mathbb{Z}}^* \xrightarrow{\Theta_E} K^* (\text{база}),$$

определяемую уравнением

$$\Theta_E(\alpha) \cdot \Delta_E = \Delta_E^\alpha, \qquad \alpha \in \hat{\mathbb{Z}}^*.$$

Функция Θ_E измеряет степень неэквивариантности изоморфизма Тома, определяемого классом Тома Δ_E,

$$x \longmapsto x \cdot \Delta_E.$$

Заметим, что

(0) функция Θ_E является произведением функций

$$(\Theta_E)_p \colon \hat{\mathbb{Z}}_p^* \longmapsto K^* (\text{база})_p.$$

---

[1]) Идея этого инварианта принадлежит Тому. Аналогичный инвариант для векторных расслоений рассматривали Адамс и Ботт.

(i) Для любого E функция $\Theta_E(\alpha) = (\Theta(\alpha))$ «является коциклом», т. е. удовлетворяет условию

$$\Theta(\alpha\beta) = [\Theta(\alpha)]^{\beta}[\Theta(\alpha)]\ ^{1)}.$$

(ii) Функция Θ_E непрерывна на $\hat{\mathbb{Z}}^*$.

(iii) Функция Θ_E экспоненциальна по E, т. е.

$$\Theta_{E \oplus F} = \Theta_E \cdot \Theta_F.$$

(iv) Если k — целое число, взаимно простое с p, то (см. ниже K-лемму) для любого двумерного ориентированного расслоения η

$$(\Theta_\eta(k))_p = \frac{1}{k}\left(\frac{\eta^k - \bar{\eta}^k}{\eta - \bar{\eta}}\right)\left(\frac{\eta + \bar{\eta}}{\eta^k + \bar{\eta}^k}\right)_p.$$

(В левой части мы рассматриваем k как элемент группы $\hat{\mathbb{Z}}_p^*$. В правой части мы рассматриваем η и $\bar{\eta}$ как комплексные линейные расслоения. При этом вся правая часть инвариантна относительно комплексного сопряжения и поэтому принадлежит вещественной K-теории.)

Обозначим через $Z_d^1(\hat{\mathbb{Z}}^*; K^*)$ группу непрерывных диагональных одномерных коциклов группы $\hat{\mathbb{Z}}^*$ со значениями в K^*, т. е. группу функций $\Theta\colon \hat{\mathbb{Z}}^* \to K^*$, удовлетворяющих условиям (0), (i) и (ii). Таким образом, $Z_d^1(\hat{\mathbb{Z}}^*; K^*)$ есть группа «непрерывных скрещенных гомоморфизмов» группы $\hat{\mathbb{Z}}^*$ в $\hat{\mathbb{Z}}^*$-модуль K^*.

Среди таких гомоморфизмов есть «главные» — образ гомоморфизма

$$K^* \xrightarrow{\delta} Z_d^1(\hat{\mathbb{Z}}^*; K^*),$$

---

[1]) Условие (i) подчеркивалось Боттом при изучении соответствующего инварианта. В нашем случае справедливость утверждений (i) и (ii) сразу следует из определения. Равенство (iii) мы докажем в следующей работе. Оно имеет место для векторных расслоений (в действительности условия (ii), (iii) и (iv) однозначно определяют функцию Θ на множестве векторных расслоений). Перенесение равенства (iii) с векторных расслоений на топологические использует только формулу произведения для сигнатур $\mathbb{Z}/m$-многообразий.

определяемого формулой

$$\delta u(\alpha) = u^{\alpha}/u \quad (u \in K^*, \ \alpha \in \hat{\mathbb{Z}}^*)\ ^{1)}.$$

Образ $\delta(K^*) \subseteq Z^1_d(\hat{\mathbb{Z}}^*;\ K^*)$ мы назовем группой кограниц. Группу одномерных диагональных когомологий группы $\hat{\mathbb{Z}}^*$ со значениями в K^* (т. е. факторгруппу группы коциклов по образу гомоморфизма δ) обозначим через

$$H^1_d(\hat{\mathbb{Z}}^*;\ K^*).$$

Рассмотрим теперь проблему (в нечетных простых числах) классификации векторных расслоений с точностью до

(a) линейного изоморфизма,

(b) послойного гомеоморфизма,

(c) послойной гомотопической эквивалентности.

Приведенная выше геометрическая характеризация дает «геометрический коцикл»

$$\Delta \in \operatorname{Hom}\left(\Omega^l_*(\ \ ;\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right),$$

который определяет стабильный тип расслоения.

Если расслоение наделено римановой метрикой, то этот числовой инвариант можно определить аналитически.

Класс Тома Δ_E (со значениями в K-теории) можно определить при помощи комплекса Ходжа расслоения E. Вместе с послойным гомотопическим типом класс Δ_E однозначно определяет топологический тип расслоения E. Наконец, Θ-инвариант вычисляется по действию группы Галуа на Δ_E.

Теорема 6.10. *Векторное расслоение E топологически тривиально в том и только в том случае, когда $\Theta_E = 1$.*

Теорема 6.11. (a) *Векторное расслоение E послойно гомотопически тривиально в том и только в том слу-*

---

[1]) Заметим следующее: δu потому является диагональным коциклом, что действие разлагается в произведение. Мы всюду ограничиваемся этим диагональным случаем.

чае, когда коцикл Θ_E принадлежит образу гомоморфизма δ.

(b) *Каждый класс когомологий (элемент группы $H_d^1(\hat{\mathbb{Z}}^*;\ K^*)$) содержит элемент вида Θ_E.*

Обозначим через J_0 и J_{top} образы K_0 и K_{top} при переходе к послойному гомотопическому типу.

Следствие[1]).

$$J_0 \cong H_d^1(\hat{\mathbb{Z}}^*;\ K^*),$$

$$J_{\mathrm{top}} \cong \mathscr{C}^1 \otimes H_d^1(\hat{\mathbb{Z}}^*;\ K^*),$$

$$K_{\mathrm{top}} \cong \mathscr{C}^1 \oplus Z_d^1(\hat{\mathbb{Z}}^*;\ K^*)$$

(*все изоморфизмы являются каноническими*).

Следствие. *Любой коцикл является Θ-инвариантом некоторого топологического расслоения.*

Замечание. Естественное отображение

$$\left\{\begin{matrix}\text{топологические}\\ \text{расслоения}\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\Theta} Z_d^1(\mathbb{Z}^*;\ K^*)$$

расщепляется. Действительно, группа коциклов изоморфна подгруппе

$$\left\{\begin{matrix}\text{гладкие}\\ \text{расслоения}\end{matrix}\right\}_1 \oplus \left\{\begin{matrix}\text{гомотопически триви-}\\ \text{альные расслоения}\end{matrix}\right\}_\xi \cong K_1 \oplus K_\xi^*$$

группы топологических расслоений. Введем с помощью этого разложения координаты в группе топологических расслоений. Тогда

(i) векторное расслоение V имеет в K_{top} компоненты

$$\left(V_1,\ \delta^{-1}(\Theta_V)_\xi,\ 0\right);$$

(ii) топологический нормальный инвариант $\cong u \in K^*$ имеет в K_{top} компоненты

$$\left(\Theta^{-1}(\delta u)_1, u_\xi, 0\right).$$

---

[1]) Первое утверждение следствия справедливо и при $p = 2$.

Замечание. Так как функция Θ_E «диагональна», а группа $\hat{\mathbb{Z}}_p^*$ циклична, то функция Θ_E определяется своим значением на любом «общем» элементе $\alpha \in \hat{\mathbb{Z}}^*$ [1]). Поэтому один инвариант $\Theta_\alpha(E) \in K^*(B)$ является полным топологическим инвариантом векторного расслоения E. В частности, E послойно гомотопически тривиально в том и только в том случае, когда $\Theta_\alpha(E) = \delta u(\alpha) = u^\alpha/u$ для некоторого $u \in K^*(B)$.

Мы сформулировали теорему в инвариантной форме, для того чтобы подчеркнуть довольно неожиданную аналогию между постановкой вопроса и «формой» ответа на него. Сейчас мы расширим эту «форму». Для этого мы добавим к нашей коллекции

$$K, \quad K^*, \quad Z_d^1(\hat{\mathbb{Z}}^*; K^*)$$

четвертую «K-группу». Рассмотрим расслоенное произведение $\mathcal{K}$, задаваемое диаграммой

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K} & \xrightarrow{p_1} & K \\ \downarrow{\scriptstyle p_2} & & \downarrow{\scriptstyle \Theta} \\ K^* & \xrightarrow{\delta} & Z_d^1 \end{array} \qquad \text{(расслоенный квадрат в } K\text{-теории)}$$

$$\mathcal{K} = \{(V, u) \in K^* \times K \mid \Theta_V = \delta u\}.$$

Таким образом, элементом группы $\mathcal{K}$ является векторное расслоение вместе с реализацией его Θ-инварианта как кограницы (образа δ).

Рассмотрим теперь теорию гладких нормальных инвариантов (или послойных гомотопических эквивалентностей $E \cong F$ между векторными расслоениями). Имеется

---

[1]) Заметим, что сама группа $\hat{\mathbb{Z}}^*$ не циклична. Поэтому мы и рассматриваем только диагональные коциклы, кограницы и т. д. Было бы интересно выяснить связь полной группы когомологий (или даже всей теории когомологий) с теорией послойного гомотопического типа и с новыми когомологическими теориями Майкла Бордмана.

естественная диаграмма (геометрический квадрат):

$$
\begin{array}{ccccc}
\left\{\begin{array}{c}\text{гладкие}\\ \text{нормальные}\\ \text{инварианты}\end{array}\right\} = & sN & \to & K_0 & = \left\{\begin{array}{c}\text{гладкие}\\ \text{расслоения}\end{array}\right\} \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
\left\{\begin{array}{c}\text{топологические}\\ \text{нормальные}\\ \text{инварианты}\end{array}\right\} = & tN & \to & K_{\mathrm{top}} & = \left\{\begin{array}{c}\text{топологические}\\ \text{расслоения}\end{array}\right\}
\end{array}
$$

Периодичность $tN \to K^*$, естественное отображение $K_0 \to K$ и Θ-инвариант Θ: $K_{\mathrm{top}} \to Z_d^1$ определяют каноническое отображение этого геометрического квадрата в предыдущий расслоенный квадрат в K-теории.

Теорема 6.12. *Индуцированное аддитивное отображение*

$$
\left\{\begin{array}{c}\text{гомотопические}\\ \text{эквивалентности}\\ \text{между гладкими}\\ \text{расслоениями}\end{array}\right\} = sN \xrightarrow{\text{формализация}} \mathcal{K} =
$$

$$
= \{(v, u)\colon\ \Theta_V = \delta u\}
$$

эпиморфно. Таким образом, любая деформация Θ-инварианта векторного расслоения к нулю реализуется послойной гомотопической тривиализацией.

Замечание. Как будет видно из доказательства, функтор $\mathcal{K}$ естественно изоморфен представимому функтору

$$
K_{\S} \oplus K_1^*.
$$

Поэтому функтор sN расщепляется. Однако ни из чего не следует, что это расщепление должно быть аддитивным. Я думаю, что препятствия к аддитивной расщепимости отличны от нуля и центральны.

§ 6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Мы будем двигаться от конца к началу, производя вычисления в K-теории и доказывая в первую очередь теорему 6.12.

Зафиксируем такой элемент $\alpha = (\alpha_p) \in \hat{\mathbb{Z}}^*$, что для каждого простого p элемент $\alpha_p \in \hat{\mathbb{Z}}_p^*$ является топологической образующей группы $\hat{\mathbb{Z}}_p^*$.

К-лемма. *Диаграмма*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "x \mapsto \theta_x(\alpha)"] \arrow[d, "\begin{smallmatrix} x \\ \downarrow \\ x^\alpha - x \end{smallmatrix}"'] & K^* \arrow[d, "\begin{smallmatrix} u \\ \downarrow \\ u^\alpha / u \end{smallmatrix}"] \\ K \arrow[r, "x \mapsto \theta_x(\alpha)"'] & K^* \end{tikzcd}$$

коммутативна. Более того, горизонтальные отображения индуцируют изоморфизм $K_1 \xrightarrow{\cong} K_1^*$, а вертикальные — изоморфизмы $K_\xi \to K_\xi$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что гомоморфизм $K \to K^*$ определяется своим сужением на приведенные K-теории $4i$-мерных сфер. Действительно, как нетрудно проверить, существует H-отображение $BO \to BO$, индуцирующее произвольное отображение рациональных примитивных классов гомологий и благодаря этому сферических классов когомологий. Как мы видели (это следует из теоремы 3.7 или из элементарной теории препятствий, локализованной в нечетных числах), отображение примитивных классов полностью определяет гомотопический тип отображения. Поэтому достаточно проверить каждое утверждение леммы для сфер S^{4i}.

(а) Приведенная K-группа $\tilde{K}(S^{4i})$ сферы S^{4i} циклична. Пусть ν — ее образующая. Допустим, что отображение θ_α переводит ν в $(1+\nu)^{\theta_i} \in 1 + \tilde{K}(S^{4i}) = K^*(S^{4i})$. Тогда

$$(\theta_\alpha \nu)^\alpha / \theta_\alpha \nu = (1 + \theta_i \nu)^\alpha / (1 + \theta_i \nu) \ [\text{так как } \nu^2 = 0] =$$
$$= (1 + \theta_i \alpha^{2i} \nu)(1 - \theta_i \nu) = 1 + \theta_i (\alpha^{2i} - 1)\nu,$$

но

$$\theta_\alpha (\nu^\alpha - \nu) = \theta_\alpha (\nu^\alpha) / \theta_\alpha (\nu) = (1 + \nu^\alpha)^{\theta_i} (1 - \theta_i \nu),$$

а последнее тоже равно $1+\theta_i(\alpha^{2i}-1)\nu$. Коммутативность доказана.

(b) Как было доказано в гл. 5, имеет место формула

$$\nu^\alpha=\alpha^{2i}\nu.$$

Поэтому

$$(1+\nu)^\alpha=1+\alpha^{2i}\nu$$

и, следовательно, для сферы S^{4i} вертикальные отображения являются умножением на $\alpha^{2i-1}-1$. Таким образом, эти отображения являются изоморфизмами при $i\not\equiv 0 \bmod (p-1)/2$, т. е. для тех размерностей, в которых сосредоточен «K_ξ-функтор сфер».

(c) Для изучения горизонтальных отображений напомним, что для всякого ориентированного двумерного векторного расслоения η имеет место формула

$$\theta_k(\eta)=\frac{1}{k}\left(\frac{\eta^k-\eta^{-k}}{\eta-\eta^{-1}}\right)\left(\frac{\eta+\eta^{-1}}{\eta^k+\eta^{-k}}\right).$$

(Она доказывается замечанием, что «класс Лапласа — Тома» Δ_η в K-теории имеет вид

$$\Delta_\eta=\frac{\eta-\bar\eta}{\eta+\bar\eta}\in KO^2(\mathbb{C}P^\infty)\subseteq KU^0(\mathbb{C}P^\infty),$$

где вычисления проводятся в комплексной K-теории пространства $\mathbb{C}P^\infty$. Здесь KO^2 рассматривается как часть KU^0, состоящая из элементов, меняющих знак при комплексном сопряжении, а KO^0 — как часть, состоящая из элементов, инвариантных относительно комплексного сопряжения. Справедливость формулы для Δ_η вытекает из того, что Δ_η имеет нужный характер Чжэня

$$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\operatorname{th} x.)$$

Нужная нам формула для $\theta_k(\eta)$ сразу следует из формулы для Δ_η. Мы свяжем сейчас θ_k с операциями Адамса ρ_k,

$$\rho_k(\eta)=\frac{1}{k}\left(\frac{\eta^k-1}{\eta-1}\right),$$

которые он явно вычислил для S^{4i}:

$$\rho_k(\nu) = 1 + r_i\nu,$$

причем для каждого простого p, такого, что k порождает группу $\hat{\mathbb{Z}}_p^*$, число r_i делится на ту же степень p, что и знаменатель несократимой дроби $B_i/4i$ [1]). Поэтому операция ρ_i индуцирует изоморфизм между 1-компонентами $\tilde{K}_1$ и K_1^*.

Напомним, что $\bar{\eta} = \eta^{-1}$. Следовательно,

$$\theta_\eta(k) = \frac{1}{k}\left(\frac{\eta^k - \eta^{-k}}{\eta - \eta^{-1}}\right)\left(\frac{\eta + \eta^{-1}}{\eta^k + \eta^{-k}}\right) =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\frac{\eta^{2k} - 1}{\eta^2 - 1}\right)\left(\frac{\eta^2 + 1}{\eta^{2k} + 1}\right) = \frac{1}{k^2}\left(\frac{\eta^{2k} - 1}{\eta^2 - 1}\right)\frac{k(\eta^4 - 1)}{\eta^{4k} - 1} =$$

$$= (\rho_k(\eta^2))^2 (\rho_k(\eta^4))^{-1}.$$

Поэтому для любых $x \in \tilde{K} = K/\mathbb{Z}$, $\alpha \in \hat{\mathbb{Z}}$ и для $\beta = 2 \in \hat{\mathbb{Z}}^*$

$$\theta_x(\alpha) = (\rho_\alpha(x^\beta))^2 (\rho_\alpha(x^{\beta^2}))^{-1}\ {}^{2)}$$

(это равенство имеет место для любого x, поскольку оно верно в случае линейного x, а обе части по x экспоненциальны). Применив эту формулу к $\nu \in \tilde{K}(S^{4i})$, получим, что

$$\theta_\nu(\alpha) = (1 + 2^{2i}\rho_i\nu)^2 (1 - 4^{2i}\rho_i\nu) =$$

$$= 1 + 2^{2i+1}(1 - 2^{2i-1})\rho_i\nu.$$

Так как $(1 - 2^{2i-1}) \equiv 0 \bmod p$, если $i \equiv 0 \bmod (p-1)/2$, то $\theta(k)$ действительно устанавливает изоморфизм между $K_1 \to K_1^*$.

Замечание. С помощью результатов Адамса из этих вычислений нетрудно вывести, что множество тех простых чисел p, для которых гладкая теория

---

[1]) См. Adams J. F., On the groups $J(X)$, I — IV, *Topology*, **2**, № 3 (1963), 181—195; **3**, № 2 (1965), 131—171; **3**, № 3 (1965), 3—36; **5**, № 1 (1966), 21—71. (Русский перевод: сб. *Математика*, **10**:5 (1966), 70—84; **11**:4 (1967), 3—41; **12**:3 (1968), 3—36; **12**:3 (1968), 37—97.) Через B_i обозначается i-е число Бернулли.

[2]) То есть $\theta_x(\alpha) = \rho_\alpha(2x^{(2)} - x^{(4)})$.

не является прямым слагаемым топологической теории, является объединением множества иррегулярных простых чисел и множества тех простых чисел p, для которых 2 имеет нечетный порядок в группе F_p^*. Более явно:

$$\underbrace{\{37,\ 59,\ 67,\ 101,\ \ldots\}}_{\text{иррегулярные числа}} \cup \underbrace{\{7,\ 23,\ 31,\ \ldots\}}_{\substack{\text{простые числа} \\ \text{вида } 8k-1}} \cup \underbrace{\{73,\ 89,\ \ldots\}}_{\substack{\text{некоторые} \\ \text{простые числа} \\ \text{вида } 8k+1\ ^{1)}}}.$$

Каждое из этих множеств бесконечно.

Доказательство эпиморфности отображения $sN \xrightarrow{f} \mathscr{K}$. Мы можем рассматривать каноническую эквивалентность $x^\alpha \cong x$ как элемент множества sN. При этом возникает естественная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
K_\xi \arrow[rrr, "d_\xi"] & & & K_\xi & \\
\cap & & & K \arrow[u] \arrow[dr, "\theta_\alpha"] & \\
K \arrow[r, "g"] \arrow[rrru, "x\mapsto(x^\alpha - x)"] \arrow[rrrd, "x\mapsto\theta_\alpha(x)"'] & sN \arrow[r, "f"] & \mathscr{K} \arrow[ru, "p_1"] \arrow[rd, "p_2"'] & & K \\
\cap & & & K^* \arrow[ur, "\delta_\alpha"'] \arrow[d] & \\
K_1 \arrow[rrr, "d_1"] & & & K_1^* &
\end{tikzcd}$$

в которой $g(x) = (x^\alpha \cong x)$. (Мы не должны проверять согласованность, так как нам необходимо знать отображение g лишь на остовах классифицирующего пространства для K-теории.)

Рассматривая гомотопические группы, легко убедиться в том, что отображения d_ξ и d_1 индуцируют изоморфизмы до больших размерностей. Из этого сле-

---

1) А именно те $p = 8k + 1$, для которых 2 имеет нечетный порядок в F_p^*.

дует, что f является эпиморфизмом и

$$\mathscr{K} \cong K_\xi \oplus K_1^*$$

для комплексов сколь угодно большой размерности.

(С помощью теории компактных представимых функторов можно доказать, что отображение f в действительности имеет сечение.)

Теорема 6.12 доказана.

Доказательство теоремы 6.9. Рассмотрим каноническое отображение диаграммы в диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} sN & \longrightarrow & K_0 \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta} \\ tN & \xrightarrow[J]{} & K_{\mathrm{top}} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \xrightarrow{\mathrm{id}} \\ \xrightarrow{p} \xrightarrow{\theta} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathscr{K} & \longrightarrow & K \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta_\Delta} \\ K^* & \xrightarrow[\delta]{} & Z_d^1 \end{array}$$

(здесь θ_Δ есть Θ-коцикл, связанный с нашим классом Лапласа — Тома), в которой p — конструируемый ниже изоморфизм, а f — изучавшееся выше отображение. Заметим, что

(a) отображение f эпиморфно;

(b) отображение $(\theta_\Delta)_1$, действующее по формуле $x \longmapsto \theta_\alpha(x)$, является изоморфизмом, согласно K-лемме;

(c) отображение δ_ξ является изоморфизмом по той же причине;

(d) группа $\mathscr{C}^1$ является по определению ядром отображения θ.

Теорема 6.9 формально следует из этих утверждений: надо только использовать согласованность отображений J и θ с действием абелеанизированной группы Галуа $\hat{\mathbb{Z}}^*$ (в частности, с действием корней из единиц).

Доказательство теорем 6.10 и 6.11. Мы имеем изоморфизмы

$$\theta(K_0)_1 \oplus J(tN)_\xi \xrightarrow[\cong]{\theta} Z_d^1(\hat{\mathbb{Z}}^*;\ K^*),$$

$$K_{\mathrm{top}} \cong \mathscr{C}^1 \oplus Z_d^1(\hat{\mathbb{Z}}^*;\ K^*).$$

При этом отождествлении отображения

$$tN \to K_{\mathrm{top}}, \quad K_0 \to K_{\mathrm{top}}$$

принимают вид $0 \oplus \delta$ и $0 \oplus \Theta_\Delta$ соответственно. Этим доказана теорема 6.10, а также второе и третье утверждения следствия. Первое утверждение следствия является переформулировкой теоремы 6.11.

Первое утверждение теоремы 6.11 следует из определения коцикла и эпиморфности отображения f. Для доказательства второго утверждения теоремы 6.11 достаточно заметить, что группа H_d^1 «сосредоточена в 1», поскольку отображение $(\theta_\Delta)_1$ является изоморфизмом. Но так как отображение δ_ξ является изоморфизмом, то гладкие расслоения порождают когомологии.

Доказательство теоремы 6.8. В гл. 5 мы доказали, что $x^\alpha - x \cong 0$. Докажем обратное (т. е. что послойно гомотопически тривиальное расслоение имеет вид $x^\alpha - x$). Начнем с векторных расслоений. В силу теоремы 6.11, векторное расслоение V послойно гомотопически тривиально в том и только в том случае, если $\theta_V \cong 0$.

Соотношение $\theta_\Delta(V) \cong 0$ означает существование такого элемента $u \in K^*$, что

$$\theta_\Delta(V)_\alpha = \delta_u(\alpha).$$

Если $V \in K_1$, то, согласно K-лемме, из этого следует, что $V = x^\alpha - x$. Что же касается другого слагаемого, K_ξ, то в нем любой элемент есть разность сопряженных расслоений.

Перейдем к топологическому случаю. Из периодичности и теоремы 6.9 следует, что действие группы Галуа в $(K_{\mathrm{top}})_\xi$ изоморфно действию группы Галуа в K_ξ^*. Поэтому каждый элемент $(K_{\mathrm{top}})_\xi$ является разностью сопряженных. Так как, далее, согласно теореме 6.9(i), каждое гомотопически тривиальное расслоение «типа 1» сглаживаемо, то соответствующая часть топологического случая сводится к гладкому случаю. Теорема 6.8 доказана.

$\widehat{K}$-ориентационная последовательность и PL_n-теория. Для изучения теории $\widehat{K}$-ориентированных расслоений и ее связей с PL-теорией мы будем пользо-

ваться некоторой специальной последовательностью на уровне классифицирующих пространств. Она имеет вид

$$\ldots \to KG_n^{\wedge} \to SG_n^{\wedge} \to B_{\otimes}^{\wedge} \to (BKG_n)^{\wedge} \to (BSG_n)^{\wedge}.$$

Здесь $(BSG_n)^{\wedge}$ — классифицирующее пространство теории ориентированных расслоений со слоем $\hat{S}^{n-1}$, а $(BKG_n)^{\wedge}$ — классифицирующее пространство теории $\hat{K}$-ориентированных $\hat{S}^{n-1}$-расслоений. (Используя технику Дольда и точную последовательность Майера — Виеториса в K-теории, легко проверить, что соответствующий функтор действительно представим.) Пространство $B_{\otimes}^{\wedge}$ классифицирует специальные единицы в $\hat{K}$. Группа $\hat{K}$-единиц естественно действует на множестве $\hat{K}$-ориентированных расслоений с фиксированной базой. Наконец, $SG_n^{\wedge}$ и $KG_n^{\wedge}$ — пространства петель.

Отображения в этой последовательности строятся естественным образом. Например:

(i) Отображение $B_{\otimes}^{\wedge} \to BKG^{\wedge}$ получается сопоставлением с каждой единицей в $\hat{K}$-теории соответствующей ориентации на тривиальном расслоении.

(ii) При больших n отображение $SG_n^{\wedge} \to B_{\otimes}^{\wedge}$ индуцировано естественным преобразованием

$$\left\{\begin{matrix}\text{стабильная когомологическая}\\ \text{теория}\end{matrix}\right\}^{\wedge} \to \{K\text{-теория}\}^{\wedge}.$$

Эта последовательность точна и индуцирует точную последовательность гомотопических групп.

Замечание. Для любой мультипликативной теории когомологий h существует аналогичная ориентационная последовательность

$$\ldots KG_n \to SG_n \to H_{\otimes} \to BhG_n \to BSG_n,$$

в которой

$$[\ ,H_{\otimes}] = \left\{\begin{matrix}\text{специальные}\\ \text{единицы } h^0(\ )\end{matrix}\right\}.$$

В случае когда произведение в теории достаточно ассоциативно на уровне коциклов, препятствием

к h-ориентируемости является элемент группы $h^1_{\otimes}(BSG)$, h^*-аналог первого класса Штифеля — Уитни.

Это верно и для K-теории, но этот случай требует особой осторожности.

Другой способ введения первого класса Штифеля — Уитни в K-теории заключается в использовании отождествления (см. ниже) этой ориентационной последовательности (в стабильном случае) с последовательностью

$$\ldots \to G \to G/PL \to BPL \to BG \dashrightarrow B(G/PL) \dashrightarrow \ldots.$$

Как показал Бордман, эту последовательность можно бесконечно продолжить вправо. Пространство $B(G/PL)$ может быть реализовано как итерированное пространство петель (любого порядка), а его пространство петель в нечетных простых числах изоморфно $BO^{\wedge}$.

Используя технику Постникова (которой меня обучил Ф. Петерсон), можно показать, что пространство $B(G/PL)$ в нечетных простых эквивалентно классифицирующему пространству для K^1 и что $\widetilde{K}^0 \cong K^*$.

Еще одна конструкция первого класса Штифеля — Уитни в K-теории (для нечетных простых чисел) может быть проведена с помощью «сигнатурного инварианта в BG», который можно построить с помощью недавно развитой техники перестроек пространств, обладающих двойственностью Пуанкаре. Это позволяет сделать конструкцию канонической.

Сравним K-ориентационную последовательность с $(PL_n \subseteq G_n)$-последовательностью:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\ldots \to & KG_n & \to & SG_n & \to & G_n/PL_n & \to & BSPL_n & \to & BSG_n \\
& \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\text{пополнение}} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle\Delta_{PL}} & & \downarrow{\scriptstyle\text{пополнение}} \\
\ldots \to & KG_n^{\wedge} & \to & SG_n^{\wedge} & \to & B_{\otimes}^{\wedge} & \to & (BKG_n)^{\wedge} & \to & (BSG_n)^{\wedge}
\end{array}$$

Отображение Δ_{PL} сопоставляет каждому ориентированному PL-расслоению E канонически соответствующее ему K-ориентированное расслоение

$$((E - B) \to B,\ \Delta_E).$$

Отображение p определяется требованием коммутативности диаграммы (или, как это более принято, своим собственным сигнатурным инвариантом)[1]).

Утверждение. *Если $n > 2$, то отображение p является пополнением (в нечетных простых числах).*

Техника перестроек, развитая Кервером, Милнором и Левином и переформулированная автором[2]), позволяет доказать периодичность гомотопических групп пространства G_n/PL_n при $n > 2$:

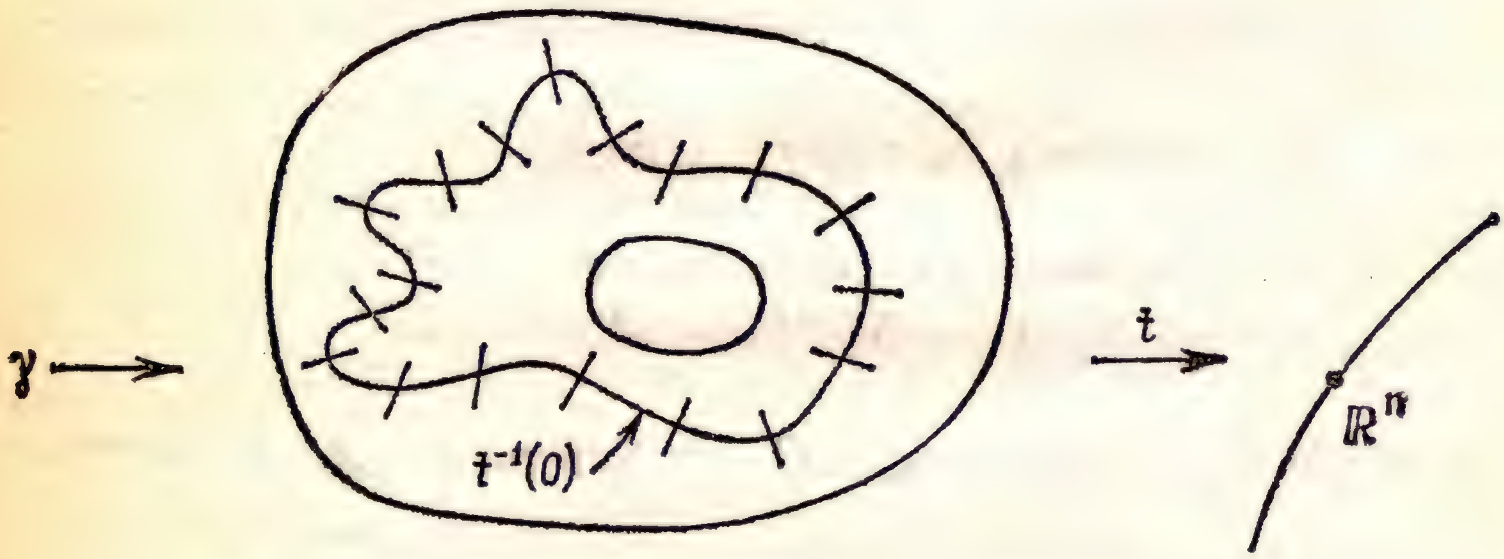
$$0,\ \mathbb{Z}/2,\ 0,\ \mathbb{Z},\ 0,\ \mathbb{Z}/2,\ 0,\ \mathbb{Z},\ \ldots .$$

При этом образующая группы π_{4k} может быть реализована отображением

$$\gamma \xrightarrow{t} \mathbb{R}^n,$$

где γ — блочное расслоение над S^{4k}, а t — собственное отображение «степени 1», трансверсальное по отношению к точке $0 \in \mathbb{R}^n$ и такое, что $t^{-1}(0)$ является $4k$-мерным многообразием, сигнатура которого есть степень двойки

$$(16,\ 8,\ 8,\ 8,\ \ldots)^{2})$$



1) Sullivan D., Thesis, Princeton, 1966.
2) Sullivan D., Geometric Topology, Seminar Notes, Princeton, 1967.

Если мы проанализируем конструкцию отображения Λ_{PL}, которое вводилось с помощью трансверсальности и сигнатуры, то мы увидим, что отображение $p\colon G_n/PL_n \to B_{\hat{\otimes}}$ индуцирует в $4k$-мерных гомотопических группах отображение

$$\begin{gathered}\mathbb{Z} \to \hat{\mathbb{Z}} \\ \text{образующая} \mapsto \text{степень двойки.}\end{gathered}$$

Все другие гомотопические группы конечны, и их порядок является степенью двойки. Утверждение доказано.

Следствие. *Отображение Δ_{PL} является пополнением (в нечетных простых числах). В частности, пополненная PL_n-теория изоморфна K-ориентированной $\hat{S}^{n-1}$-теории.*

Доказательство. Умножим тензорно на $\hat{\mathbb{Z}}$ верхнюю гомотопическую последовательность. Мы получим последовательность, изоморфную, согласно 5-лемме, нижней гомотопической последовательности.

Доказательство теоремы 6.5 ($\mathbb{Z}$) закончено.

Из описания пространства $(BSG_n)_{\mathbb{Q}}$ (см. гл. 4), диаграммы

$$\begin{tikzcd} G_n/PL_n \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & BSPL_n \arrow[r] \arrow[d] & BSG_n \arrow[d] \\ G/PL \arrow[r] & BSPL \arrow[r] & BSG \end{tikzcd} \qquad n > 2$$

и конечности групп $\pi_i BSG$ следует разложение

$$(BSPL_n)_0 \cong (BSPL)_0 \times (BSG_n)_0 \cong$$
$$\cong \prod_i H^{4i}(\ ;\mathbb{Q}) \times H^d(\ ;\mathbb{Q}),$$

где $d = n$, если n четно, и $d = 2n - 2$, если n нечетно.

Теорема 6.5 ($\mathbb{Q}$) доказана.

Эквивариантность. Мы построили действия групп в трех ориентированных теориях:

$$\left\{\begin{matrix}n\text{-мерные}\\ \text{векторные}\\ \text{расслоения}\end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix}n\text{-мерные}\\ PL\text{-расслоения}\end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix}\hat{S}^{n-1}\text{-рас-}\\ \text{слоения}\end{matrix}\right\},$$

$$\mathrm{Gal}\,(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \qquad \hat{\mathbb{Z}}^* \times \hat{\mathbb{Z}}^* \qquad \hat{\mathbb{Z}}^*$$

используя

(i) этальные когомологии (см. гл. 5),

(ii) только что доказанное отождествление PL-теории с K-ориентированной теорией,

(iii) конструкцию пополнения расслоений (см. гл. 4).

Для доказательства первого утверждения теоремы 6.6 рассмотрим корасслоение

$$(BSO_{n-1})\hat{} \to (BSO_n)\hat{} \to \{\text{пространство Тома } \hat{\gamma}_n\},$$

где $\hat{\gamma}_n$ — пополненное сферическое расслоение, соответствующее каноническому расслоению над BSO_n.

Элемент $\alpha \in \mathrm{Gal}\,(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ индуцирует гомотопическую эквивалентность (α) пространства Тома, и с помощью теорий препятствий легко проверить, что

$$(\alpha)^* x = \beta \cdot x^\alpha$$

для любого элемента $x \in \hat{K}$ (пространство Тома). Здесь

$$\beta = \begin{cases} \alpha^{n/2}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \alpha^{(n-1)/2}, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

(Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{пространство Тома } \hat{\gamma}_n & \xrightarrow{x} & \hat{B} \\ \downarrow{\scriptstyle(\alpha)} & & \downarrow{\scriptstyle \text{операция } \beta\cdot(\ )^\alpha} \\ \text{пространство Тома } \hat{\gamma}^n & \xrightarrow{x} & \hat{B} \end{array}$$

коммутативна на уровне когомологий.)

Второе утверждение теоремы 6.6 совершенно очевидно.

Для доказательства теоремы 6.7, описывающей стабильную эквивариантность, заметим, что существует автоморфизм послойного пополнения послойного джойна γ с $K(\hat{\mathbb{Z}}, 1)$, индуцирующий умножение ориентации на произвольный обратимый элемент кольца $\hat{\mathbb{Z}}$. После этого теорема 6.7 сразу же выводится из теоремы 6.6.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода 5
Введение 6

Глава 1. Алгебраические конструкции 13

§ 1. Локализация 13
§ 2. Пополнения 21
§ 3. Сравнение пополнения с локализацией 39

Глава 2. Теоретико-гомотопическая локализация 48

Глава 3. Пополнение в гомотопической теории 70

§ 1. Построение проконечного пополнения $\hat{X}$ . . . 71
§ 2. Некоторые свойства проконечного пополнения 81
§ 3. l-проконечное пополнение 99
§ 4. Арифметический квадрат в гомотопической теории 104

Глава 4. Сферические расслоения 115

Глава 5. Алгебраическая геометрия. Эталь-гомотопическая теория 143

Введение 143
§ 1. Интуитивное обсуждение этального гомотопического типа 146
§ 2. Полный этальный гомотопический тип 165
§ 3. Симметрии Галуа в грассманианах BU_n и BSO_n 173
§ 4. Действие группы Галуа в K-теории, операции Адамса и «линейная» гипотеза Адамса 186
§ 5. Группы преобразований конечных грассманианов, порожденные автоморфизмами Фробениуса 201
§ 6. Этальный гомотопический тип вещественного многообразия. Топологическая гипотеза 211

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129810, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
готовит к выпуску в 1976 г.

ДОЛЬД А., **Лекции по алгебраической топологии,** перевод с английского, 28 л.

Курс по алгебраической топологии и теории многообразий написан известным ученым и талантливым педагогом. Простота и ясность подачи материала сочетаются с аккуратностью и строгостью доказательств. Большое количество интересных примеров способствует пониманию предмета. Несомненное достоинство книги — элементарное и доступное изложение топологии многообразий. В то же время новый взгляд на некоторые известные понятия делает ее интересной и для специалистов.

Книга рассчитана на широкий круг математиков и может служить учебником по алгебраической топологии для студентов и аспирантов университетов и пединститутов.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
готовит к выпуску в 1976 г.

УЭЛЛС Р., **Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях,** перевод с английского, 17 л.

Книга является хорошим введением в современную теорию комплексных многообразий. Автору удалось наряду с основной темой изложить обширный вспомогательный материал, необходимый для исследования комплексных многообразий и впервые собранный в одной книге. Многочисленные, хорошо подобранные примеры, четкие формулировки и обсуждения теорем, выходящих за рамки введения, значительно увеличивают объем информации и знакомят с самыми последними достижениями в теории компактных комплексных многообразий.

Книга будет интересна математикам различных специальностей, особенно специалистам по теории функций, дифференциальной геометрии и топологии. Она доступна аспирантам и студентам старших курсов университетов и пединститутов.

Уважаемый читатель!

Заказы на эти книги можно оформить в магазинах, торгующих научно-технической литературой, или направить в фирменную секцию издательства «Мир» по адресу: 121019, Москва, Г-19, проспект Калинина, 26, п/я № 42, Московский дом книги. Помните, что своевременно оформленный заказ помогает правильному установлению тиража книги и гарантирует Вам получение ее в первые дни поступления в продажу.

A

82 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·